Ответы на задачи и вопросы, помещенные в предыдущем выпуске

К лекции 12

2. Ответ приведен в таблице; q_1 и q_2 означают количество продукта, используемого 1-м и 2-м способами соответственно.

q	q_1	q_2	$TU(q)$
1	1	0	10
2	2	0	20
3	3	0	28
4	2	2	37
5	2	3	46
6	{2; 3	4; 3}	54
7	3	4	62
8	4	4	69
9	4	5	73
10	{4; 5	6; 5}	76
11	5	6	79
12	{5; 6	7; 6}	81
13	6	7	83
14	7	7	84

Фигурными скобками объединены равноценные варианты.

К лекциям 13–14

1. При постоянстве цен бюджетные линии параллельны друг другу и их точки касания с кривыми безразличия лежат на луче AB, параллельном оси Oq_1 (рис. 1). Этот луч представляет собой участок линии доход—потребление (ICC), соответствующий внутреннему положению потребительского оптимума. При доходе, меньшем некоторого граничного значения I^*, оптимум принимает угловое положение и соответствующий участок ICC — это отрезок OA. На рис. 2 представлены зависимости q_1 и q_2 от дохода I.

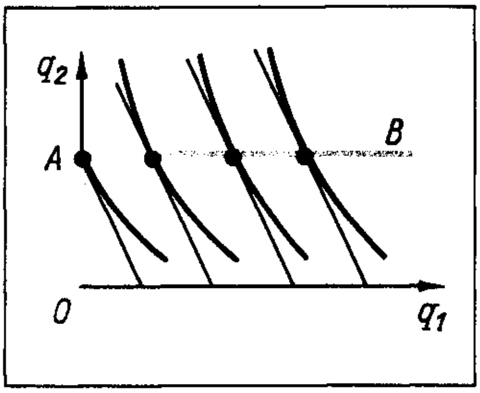

Рис. 1.

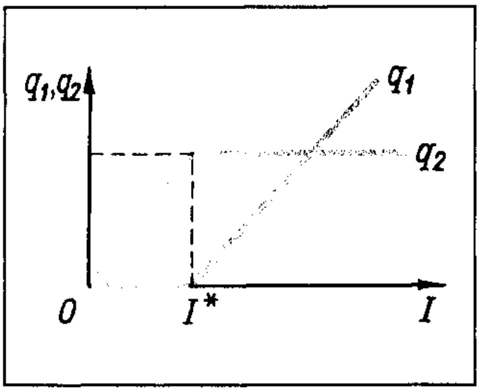

Рис. 2.

2а. Из условия задачи следует, что если какие-либо два набора X_1 и X_2 равноценны по предпочтению ($X_1 \sim X_2$), то при любом положительном α окажется $\alpha X_1 \sim \alpha X_2$. А это означает, что все кривые безразличия могут быть получены из одной из них посредством преобразования подобия (гомотетии) с центром в начале координат (см. вып. 2: Математическое приложение «Пространство благ»).

2б. Пусть при доходе M_0 оптимуму потребителя отвечает точка A_0 (рис. 3). Покажем, что при доходе $M_1 = \alpha M_0$, где α — любое положительное число, оптимум изображается точкой $A_1 = \alpha A_0$, лежащей на луче OA_0.

Так как цены предполагаются неизменными, при доходе M_1 точка A_1 доступна потребителю. Допустим, что она не отвечает оптимуму, т. е. найдется доступная точка B_1, такая, что $B_1 \succ A_0$. Но тогда при доходе M_0 доступна точка $B_0 = 1/\alpha B_1$; в силу условия задачи отсюда следовало бы $B_0 \succ 1/\alpha A_1 = A_0$, т. е. при доходе M_0 точка A_0 не отвечала бы оптимальному выбору, что противоречит допущению.

Итак, при изменении дохода и неизменных ценах точка потребительского оптимума перемещается вдоль луча, выходящего из начала координат, и ICC представляет собой такой луч. Потребление каждого продукта при этом изменяется пропорционально, так что доли бюджета потребителя, выделяемые для покупки каждого из продуктов, при изменении дохода будут оставаться постоянными.

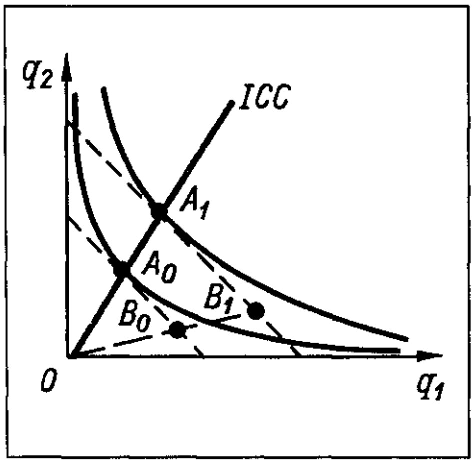

Рис. 3.

3а. Треугольник OAB изображает множество доступных наборов для обоих потребителей в начальном состоянии, а треугольник $OA'B'$ — в конечном состоянии. Точки C и C' показывают соответствующие положения потребительского оптимума. Благосостояние 1-го потребителя повысилось; это значит, что точка C' в исходном состоянии была ему недоступна и, следовательно, она располагается за пределами треугольника OAB. По аналогичной причине точка C недоступна 2-му потребителю в конечном состоянии, так что она должна располагаться вне треугольника $OA'B'$. Именно такая ситуация представлена на рис. 4.

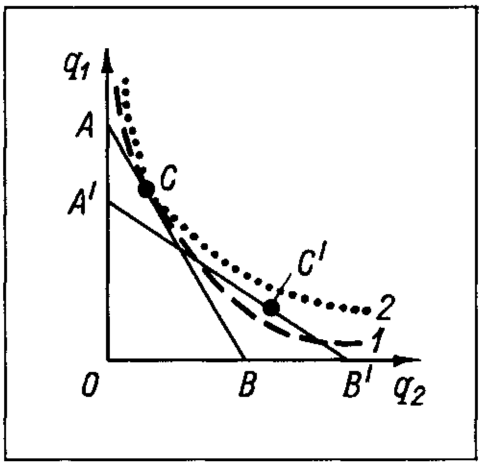

Рис. 4.

3б. На рис. 4 показаны кривые безразличия каждого из потребителей, соответствующие начальному состоянию (*1* и *2*). Видно, что при переходе в точку C' их благосостояние изменится противоположным образом. Кривые безразличия для конечного состояния не показаны, чтобы не загромождать чертеж; они легко могут быть построены из соображений симметрии.

4. Пусть a и b — приобретаемые количества продуктов A и B. Потребитель может приготовить блюдо C в количестве c, использовав для этого согласно рецепту продукты A и B в количествах $2c$ и $3c$ соответственно, так что в конечном счете он использует A, B и C в количествах $a - 2c$, $b - 3c$ и c соответственно. Прирост Δc потребления блюда C перекрывает потерю полезности из-за уменьшения отдельного использования продуктов A и B на величины $2\Delta c$ и $3\Delta c$. Поэтому потребитель стремится изготовить блюдо C в максимально возможном количестве, т. е. он выбирает:

$$c = \frac{a}{2}, \quad \text{если} \quad \frac{a}{2} \le \frac{b}{3};$$
$$c = \frac{b}{3}, \quad \text{если} \quad \frac{a}{2} > \frac{b}{3}.$$

На плоскости Oab проведем луч OC, точки которого удовлетворяют условию

$a/2 = b/3$ (рис. 5). Первому случаю соответствуют точки, расположенные над лучом OC. Расположенные в этой части плоскости участки кривых безразличия соответствуют замещению блюда C и продукта B, имеющегося в «избыточном» количестве. Область под лучом OC характеризуется замещением блюда C и «избытка» продукта A. Так как все рассматриваемые продукты совершенно взаимозаменяемы, участки кривых безразличия в каждой из областей — отрезки прямых.

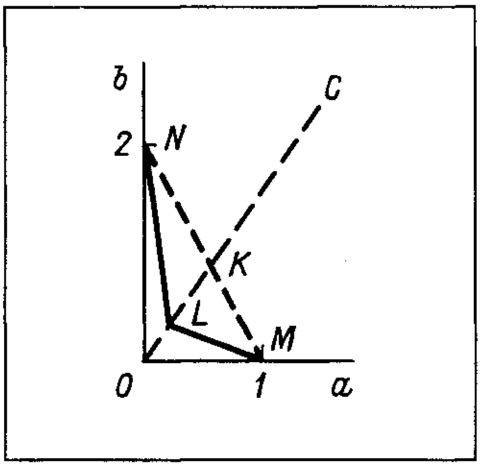

Рис. 5.

Построим теперь какую-либо из кривых безразличия. Пусть она для определенности проходит через точку M $(1, 0)$. Если бы потребитель не мог приготовить блюдо C и потреблял бы A и B по отдельности, кривая безразличия была бы отрезком MN, где N $(0, 2)$ (известно, что единица A замещается двумя единицами B). В действительности на интересующей нас кривой безразличия лежат только крайние точки отрезка, M и N. Вместо точки K, лежащей на пересечении MN и OC, на кривую безразличия попадет точка L, характеризующаяся втрое меньшим потреблением каждого из продуктов, чем в точке K: норма замещения блюдом C исходных продуктов A и B равна 3. Кривая безразличия — двузвенная ломаная MLN. Найдем ее параметры. Уравнения луча OC и отрезка MN

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3}; \quad b = 2 - 2a$$

определяют координаты точки K:

$$a_K = \frac{4}{7}; \quad b_K = \frac{6}{7},$$

откуда

$$a_L = \frac{4}{21}; \quad b_L = \frac{2}{7}.$$

Определим значения предельной нормы замены на участках кривой безразличия. На отрезке ML

$$MRS = \frac{2/7}{1 - 4/21} = \frac{6}{17},$$

а на отрезке LN

$$MRS = \frac{2 - 2/7}{4/21} = 9.$$

Эти же значения норм замены будут иметь место на всех кривых безразличия, на участках, расположенных ниже и выше луча OC соответственно, так что карта безразличия имеет вид рис. 6.

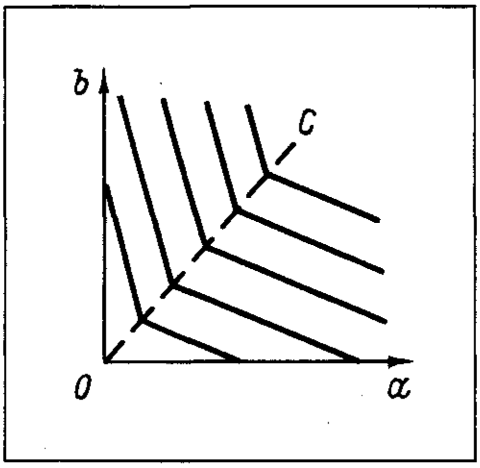

Рис. 6.

Введем обозначение $h = P_A/P_B$ для отношения цен продуктов A и B. При $6/17 < h < 9$ потребитель будет приобретать A и B в объемах, изображаемых точками луча OC, т.е. в соотношении 2 : 3; он будет лакомиться исключительно блюдом C (бюджетные линии *1* и *2* на рис. 7). Если $h > 9$, потребитель откажется от приобретения A и будет потреблять только B (линия *3*), а при

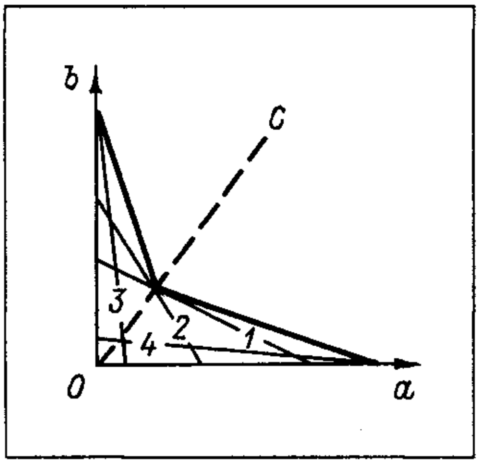

Рис. 7.

$h < 6/17$ он поступит противоположным образом (линия *4*).

5. Аналитическая часть решения дается только для общего случая (N продуктов).

а)

$$\sum_{i=1}^{N} p_i(x_i - a_i) \le m; \quad x_i \ge a_i,$$
$$i = 1, 2, ..., N.$$

б)

$$\sum_{i=1}^{N} p_i[x_i - a_i]^+ \le m; \quad x_i \ge 0,$$
$$i = 1, 2, ..., N,$$

где символ $[\ ]^+$ обозначает положительную часть числа:

$$[x]^+ = \begin{cases} x, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

в)

$$\sum_{i=1}^{N} p_i(x_i - a_i) \le m; \quad x_i \ge 0,$$
$$i = 1, 2, ..., N.$$

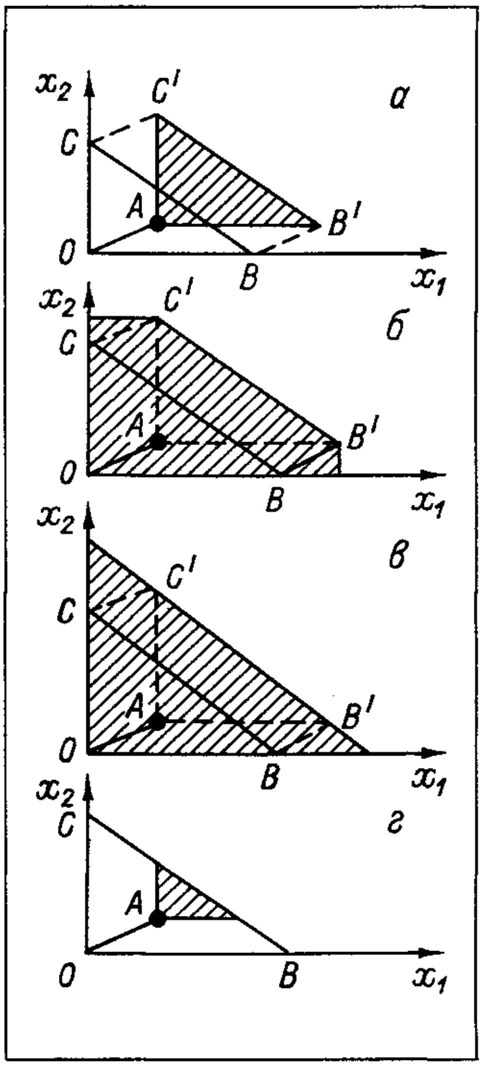

Рис. 8.

г)

$$\sum_{i=1}^{N} p_i x_i \le m; \quad x_i \ge a_i,$$
$$i = 1, 2, ..., N.$$

Решение для $N = 2$ представлено на рис. 8.

К лекции 15

2а. Если предположить, что весь свой располагаемый доход (M) потребитель расходует только на товар Y, имеем

$M = P_x \cdot 0 + 12 \cdot 45 = 540$ р.

2б. Цену товара X можно определить, предположив, что потребитель расходует свой доход только на этот товар:

$P_x = M/x_{\max} = 540/75 = 7.2$ р.

2в. При увеличении цены товара Y до 15 р. точка пересечения бюджетной линии с осью OY переместится в точку с координатой 36 (540/15), а при уменьшении цены до 10 р. — в точку с координатой 54 (540/10).

2г. При $P_y = 12$ уравнение бюджетной линии имеет следующий вид:

$y = 45 - 0.6x$;

при ценах $P_y = 15$ и $P_y = 10$ соответственно

$y = 36 - 0.48x$ и $y = 54 - 0.72x$.

3а. $P_y = 200/40 = 5$ р.

3б. Определим два значения цены, при которых максимальный объем потребления товара X составляет 10 и 25 единиц соответственно:

$$P = \frac{M}{x_{\max}} = \frac{200}{20} = 10 \text{ р.}$$

$$P = \frac{M}{x_{\max}} = \frac{200}{40} = 5 \text{ р.}$$

Следовательно, координаты точек линии спроса (10, 10), (5, 25).

3в. Зависит.

К лекции 17

1. При доходе $m \leq 200$ потребитель не может купить более 20 единиц товара X, и ограничение имеет обычный вид:

$$10x + 2y \leq m. \qquad (1)$$

Если же $m > 200$, то потребитель в состоянии купить несколько больше 20 единиц продукта X, заплатив за весь объем $200 + 5(x - 20) = 100 + 5x$. Таким образом, бюджетное ограничение при $m > 200$ имеет вид (рис. 9)

$x \leq 20, \quad 10x + 2y \leq m$;

или

$x > 20, \quad 5x + 2y + 100 \leq m$.

2. Кривые спроса для всех трех вариантов приведены на рис. 10. Случаи

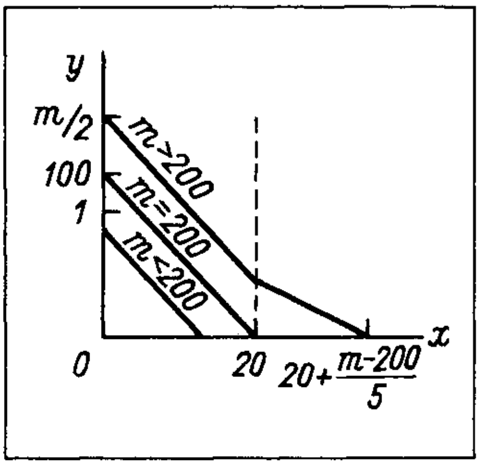

Рис. 9.

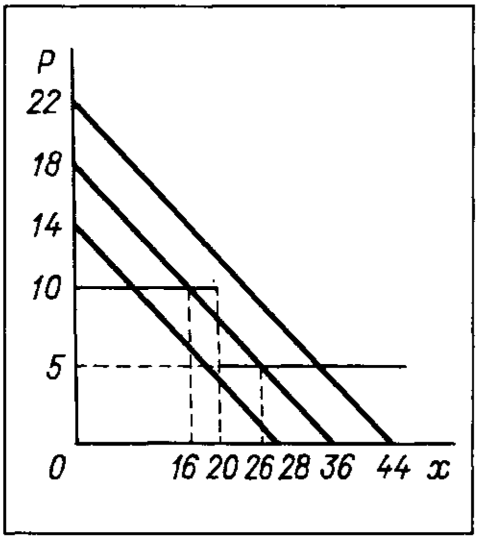

Рис. 10.

$A = 28$ и $A = 44$ более просты: для них существует единственная точка равновесия.

Рассмотрим более подробно случай $A = 36$.

Цена спроса при объеме x равна $P_D(x) = 18 - x/2$, а общая полезность в денежной форме равна

$$TU = (x) = \int_0^x P_D(q)dq =$$

$$= 18x + \frac{1}{4}x^2, \quad x \leq 36.$$

Затраты на покупку в зависимости от объема описываются по-разному на различных участках:

$$C(x) = \begin{cases} 10x, & x \le 20; \\ 100 + 5x, & x > 20. \end{cases}$$

Превышение полезности над затратами равно:

$$V(x) = TU(x) - C(x) =$$
$$= \begin{cases} 8x - \frac{1}{4}x^2, & x \le 20; \\ -100 + 13x - \frac{1}{4}x^2, & x > 20. \end{cases}$$

Эта функция имеет локальные максимумы на каждом участке: на 1-м участке $x = 16$, на 2-м $x = 26$ (проверьте!).

$$V(16) = 8 \cdot 16 - \frac{1}{4} \cdot 16^2 = 64;$$
$$V(26) = -100 + 13 \cdot 26 - \frac{1}{4} \cdot 26^2 = 69.$$

Второе значение больше, так что потребителю выгоднее приобрести 26 единиц, и излишек потребителя равен 69.

3. Здесь мы используем результаты решения задачи 1 к лекции 10 (вып. 2, с. 280). До введения налогов и дотаций излишек потребителя составлял $W^D = 1/2 \cdot 4(9 - 5) = 8$ р.; излишек производителя: $W^S = 1/2 \cdot 4(5 - 3) = 4$ р.

Поскольку различные системы налогообложения, описанные в 1а и 1б, приводят к одному и тому же результату, ответы по этим пунктам совпадают. При введении потоварного налога, уплачиваемого продавцом, в размере 1.5 р. за штуку или в размере 25% от цены:

$$\Delta W^D = \frac{4+3}{2}(5 - 6) = -3.5;$$
$$\Delta W^S = \frac{4+3}{2}(4.5 - 5) = -1.75.$$

При введении субсидии в размере 1.5 р. за штуку проданного товара (1в):

$$\Delta W^D = \frac{4+5}{2}(5 - 4) = 4.5;$$
$$\Delta W^S = \frac{4+5}{2}(5.5 - 5) = 2.25.$$

К лекции 18

1. Решение представлено на рис. 11. Здесь $\operatorname{tg}\alpha = 1 + r$, $\operatorname{tg}\alpha_0 = 1 + r_0$, $\operatorname{tg}\alpha_1 = 1 + r_1$. В случае *г* потребителю доступны любые наборы: так как ограничения на размер кредита отсутствуют, потребитель может взять в кредит под процентную ставку r_0 сколь угодно большую сумму и часть этой суммы немедленно дать взаймы под больший процент r_1, так что чистый доход от обеих кредитных операций окажется достаточным для покупки любого количества благ.

В качестве дополнительного упражнения определите в случае *г* минимальный размер кредита, позволяющий затратить суммы c_0, c_1 на потребление в текущем и будущем периодах.

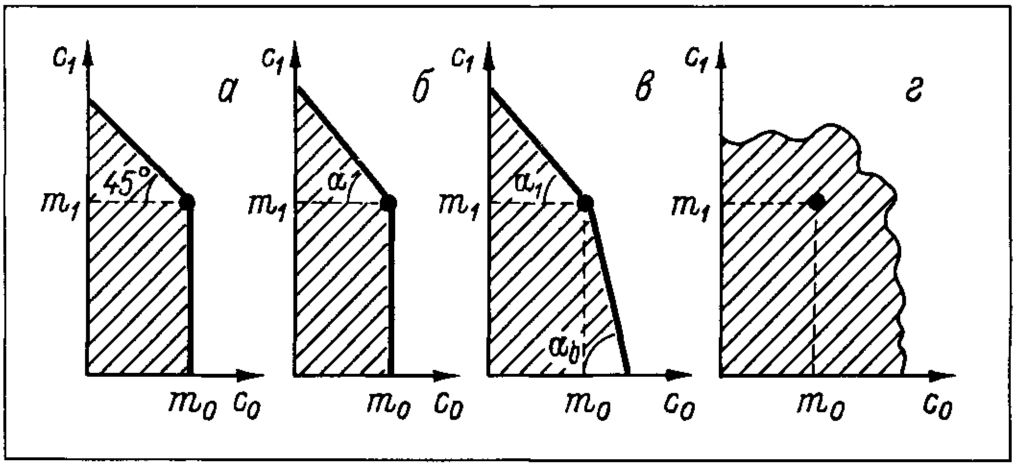

Рис. 11.

2. Введем дополнительные обозначения.

Пусть X — искомый размер ежегодного взноса; Y_t — остаток долга сразу после уплаты t-го взноса, $t = 1, ..., T$; $Y_0 = C$; $R = 1 + r$ — годовой коэффициент роста остатка долга.

Имеет место цепочка равенств:

$$Y_1 = RY_0 - X;$$
$$Y_2 = RY_1 - X$$

и т. д. Общее выражение:

$$Y_t = RY_{t-1} - X, \quad t = 1, ..., T. \qquad (1)$$

Последнее равенство в этой цепочке $Y_T = RY_{T-1} - X$. Но по условию за T лет кредит должен быть полностью возвращен, так что $Y_T = 0$, и поэтому $Y_{T-1} = R^{-1}X$. Каждое из равенств цепочки (1) можно представить в виде

$$Y_{t-1} = R^{-1}(X + Y_t)$$

и в обратной последовательности найти

$$\begin{aligned} Y_{T-2} &= R^{-1}(X + Y_{T-1}) = \\ &= R^{-1}(X + R^{-1}X) = X(R^{-1} + R^{-2}); \\ Y_{T-3} &= R^{-1}(X + Y_{T-2}) = \\ &= X(R^{-1} + R^{-2} + R^{-3}) \end{aligned}$$

и т. д. Пройдя всю цепочку, получим

$$C = Y_0 = X \sum_{t=1}^{T} R^{-t}.$$

Выполним суммирование геометрической прогрессии:

$$C = XR^{-1}\frac{1 - R^{-T}}{1 - R^{-1}} = X\frac{1 - R^{-T}}{R - 1},$$

откуда

$$C = \frac{X}{r}(1 - R^{-T}). \qquad (2)$$

Заметим, что равенство (2) совпадает с выражением, полученным в примере, разобранном в разделе 3 лекции 18. Его правая часть — это сегодняшняя оценка предстоящих взносов.

Таким образом, мы пришли к решению:

$$X = \frac{r}{1 - R^{-T}}C.$$

Подставляя численные данные, получим

$$X = \frac{0.15}{1 - 1.15^{-5}}10 = 2.983 \text{ тыс. р.}$$

3. Воспользуемся выражением (2), полученным при решении предыдущей задачи. Пренебрежем некоторой неравномерностью поступления номеров газеты, вызванной выходными и праздничными днями, и будем считать, что интервал между поступлениями последовательных номеров равен $1/300$ года. Коэффициент трансформации для такого интервала

$$R_1 = R^{1/300},$$

где $R = 1.2$ — годичный коэффициент трансформации. Если P — цена одного номера, Z — стоимость подписки, то в соответствии с равенством (2)

$$Z = \frac{1 - R_1^{-T}}{R_1 - 1}P,$$

где $T = 300$ для годовой подписки и $T = 150$ для полугодовой. Для годовой подписки:

$$Z = \frac{1 - 1/1.2}{1.2^{1/300} - 1}2 = 548.34 \text{ р.};$$

для полугодовой:

$$Z = \frac{1 - 1/\sqrt{1.2}}{1.2^{1/300} - 1}2 = 286.66 \text{ р.}$$

К этой задаче можно применить и иной подход. Поступление газет можно приближенно рассматривать как непрерывный процесс с постоянной интенсивностью 300 номеров/год, а в денежной оценке $M = 600$ р./год. Часть потока, приходящаяся на малый интервал времени Δt, равна $M\Delta t$, а если этот интервал отстоит на время t от момента подписки, то сегодняшняя (на момент подписки) ценность этой части потока равна $Me^{-\rho t}\Delta t$, где $\rho = \ln R$ (см. формулу на с. 161 вып. 2; время удобно измерять в годах). Суммируя значения ценности для всех интервалов и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$Z = \int_0^T Me^{-\rho t}dt,$$

а так как интенсивность потока M не изменяется во времени,

$$Z = M\int_0^T e^{-\rho t}dt = M\frac{1-e^{-\rho t}}{\rho}.$$

Для годовой подписки ($T = 1$) имеем

$$Z = 600\frac{1-1/1.2}{\ln 1.2} = 548.48 \text{ р.},$$

а для полугодовой ($T = 0.5$) —

$$Z = 600\frac{1-1/\sqrt{1.2}}{\ln 1.2} = 286.73 \text{ р.}$$

Как видим, эти решения незначительно отличаются от полученных ранее.

К лекции 19

1. Вычислим индексы цен по формуле Ласпейреса и Пааше:

$$\mathrm{L}_p = \frac{\sum p^1q^0}{\sum p^0q^0} = \frac{0.5\cdot 100 + 40\cdot 120}{0.3\cdot 100 + 30\cdot 120} \approx 1.336088;$$

$$\mathrm{P}_p = \frac{\sum p^1q^1}{\sum p^0q^1} = \frac{0.5\cdot 140 + 40\cdot 130}{0.3\cdot 140 + 30\cdot 130} \approx 1.336885.$$

Теперь вычислим индексы объема по формуле Пааше и Ласпейреса:

$$\mathrm{L}_q = \frac{\sum q^1p^0}{\sum q^0p^0} = \frac{140\cdot 0.3 + 130\cdot 30}{100\cdot 0.3 + 120\cdot 30} \approx 1.08595;$$

$$\mathrm{P}_q = \frac{\sum q^1p^0}{\sum q^0p^0} = \frac{140\cdot 0.5 + 130\cdot 40}{100\cdot 0.5 + 120\cdot 40} \approx 1.086598.$$

Рассчитаем индексы цен и объема, применив формулу Фишера:

$$\mathrm{F}_p = \sqrt{\mathrm{L}_p^{1/0}\mathrm{P}_p^{1/0}} = \sqrt{1.336085\cdot 1.336885} \approx 1.336486;$$

$$\mathrm{F}_q = \sqrt{\mathrm{L}_q^{1/0}\mathrm{P}_q^{1/0}} = \sqrt{1.08595\cdot 1.086598} \approx 1.086274.$$

Расчеты показывают, что индекс Пааше дает больший рост в сравнении с индексом Ласпейреса. Индекс же Фишера находится между индексом Ласпейреса и Пааше.

Вычислим теперь индекс номинального дохода:

$$I_{\text{нд}} = \frac{\sum p^1q^1}{\sum p^0q^0} = \frac{0.5\cdot 140 + 40\cdot 130}{0.3\cdot 100 + 30\cdot 120} \approx 1.451791.$$

2. Возникнут трудности с потребительской корзиной, по которой определяется ИСЖ, так как сопоставление двух корзин станет не вполне корректным (см. раздел 3 лекции 19).

К лекции 20

1а. В разделе 1 рассмотрен пример, в котором несколько человек получают одинаковые доходы. Кривая Лоренца для такой совокупности — это отрезок прямой. Любой линейный отрезок кривой Лоренца соответствует группе лиц, получающих одинаковые доходы.

По условию кривая Лоренца состоит из двух линейных участков. Следовательно, все население распадается на две группы — на бедных и богатых. При этом люди, относящиеся к одной группе, получают одинаковый доход.

1б. Пусть N — число жителей царства, Y — их суммарный доход. Средний душевой доход при этом $\overline{M} = Y/N$.

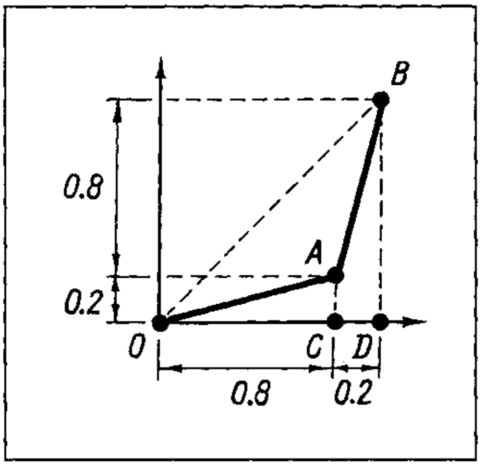

Рис. 12.

Бедной части населения соответствует участок OA кривой Лоренца (рис. 12). Эта группа составляет 0.8 численности населения и получает 0.2 суммарных доходов. Поэтому доход каждого из них

$$M_1 = \frac{0.2Y}{0.8N} = \frac{1}{4}\overline{M} = 25 \text{ пиастров/год}$$

(по условию $\overline{M} = 100$). Доля богатых в общей численности населения 0.2, а в суммарных доходах — 0.8, поэтому доход каждого из них

$$M_2 = \frac{0.8Y}{0.2N} = 4\overline{M} = 400 \text{ пиастров/год.}$$

2а. По условию задачи поведение субъектов не изменилось после введения системы налогов и пособий, так что численность каждой из групп населения осталась прежней. Поэтому точка A в новом положении имеет прежнюю абсциссу 0.8 (рис. 13). Не изменились и суммарные доходы. Доля богатых в суммарном доходе после изъятия у каждого из них 25% дохода составляет $0.8(1-0.25) = 0.6$, поэтому ордината точки A теперь равна $1 - 0.6 = 0.4$.

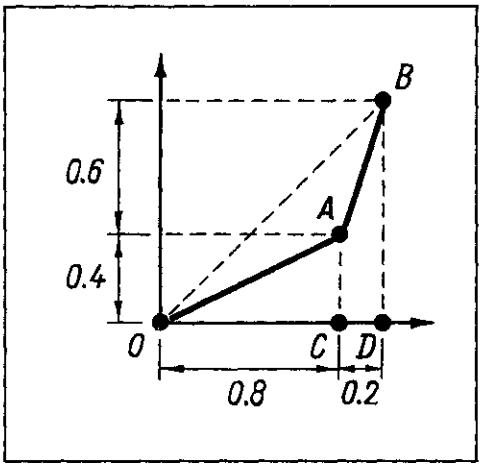

Рис. 13.

2б. Доход каждого из богатых находится непосредственно: $M_2 = 400(1-0.25) = 300$. Воспользовавшись методом, примененным в задаче 1, найдем, что каждый из бедных получает по 50 пиастров в год.

3. Коэффициент Джини в каждом случае равен отношению площадей треугольников OBA и OBD (рис. 12, 13). Площадь треугольника OBD равна $1/2$, а площадь треугольника OBA в каждом случае может быть определена вычитанием из $1/2$ суммы площадей треугольника OAC и трапеции $ABDC$. Для первого случая $G = 0.6$, для второго — $G = 0.4$.