Математическое приложение

Пространство благ

Основные понятия

Многие теоретические вопросы обсуждаются в нашем журнале применительно к случаю двух продуктов. В качестве удобного средства, существенно упрощающего их анализ, использовались графические построения, в которых набор, включающий два продукта в количествах x_1 и x_2, изображался точкой на плоскости с декартовыми координатами (x_1, x_2). Перевод теоретических понятий на геометрический язык делал свойства обсуждаемых явлений весьма наглядными и при этом не приводил к потере строгости: все геометрические понятия (прямые, кривые, углы наклона и т. п.) имели точно определенные аналитические эквиваленты — уравнения, производные, соотношения между параметрами и т. д. Поэтому такие построения широко используются и в учебниках по экономике, и в научных публикациях.

Однако эти геометрические рассуждения были строгими и точными лишь для случаев, когда перечень потребляемых благ включал всего два наименования. В действительности же число благ, которыми пользуются люди, значительно больше. Выводы, полученные геометрическим путем, можно считать обладающими достаточной общностью, если их удастся распространить на случаи произвольного числа благ.

Будем считать, что мы присвоили всем мыслимым благам номера $i = 1, 2, ..., n$, и x_i обозначает количество i-го блага. Тогда набор благ X может быть представлен n числами, расположенными в порядке номеров благ:

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n). \tag{1}$$

Под n-мерным *пространством благ* будем понимать множество числовых наборов вида (1). Каждый такой набор чисел будем называть *точкой* (*элементом*) пространства, или *вектором*, а числа x_i — ее *координатами*, или *компонентами*.

Рассматривая некоторое пространство благ, мы будем считать число компонент n — размерность пространства — фиксированным; более того, на каждом месте в наборе (1) должно стоять количество блага определенного вида. Если данный потребитель не использует какое-нибудь, скажем, k-е благо, то будем считать $x_k = 0$.

Условимся обозначать точки пространства благ большими латинскими буквами, а их координаты — соответствующими маленькими буквами с индексами — номерами координат. Нам не придется каждый раз пояснять, что, например, z_2 — это вторая координата точки Z.

Точки X и Y будем считать равными и записывать $X = Y$ в том и только том случае, если совпадают все их координаты: $x_i = y_i$. Если же точки «одинаковы» в каком-то отношении (скажем, равноценны по потребительским предпочтениям), но имеют неодинаковые координаты, мы будем их считать неравными друг другу.

Реальные наборы благ, разумеется, не могут иметь отрицательных координат. Тем не менее мы будем рассматривать пространства, точки которых могут иметь координаты любых знаков, чтобы в этих пространствах нашлось место не только для реальных наборов, но и для приращений, отклонений, «шагов» и т. д., а также для некоторых условных наборов, которые могут появиться в различных мысленных экспериментах.

Арифметические операции

Рассмотрим задачу, чрезвычайно похожую на те, с которых начинается изучение математики. Некий гражданин приобрел набор продуктов X, а его жена — набор Y. Спрашивается, сколько они купили вместе?

То, что они приобрели вместе — набор продуктов Z — естественно считать *суммой* $Z = X + Y$. При этом каждая компонента z_i есть сумма соответствующих компонент x_i и y_i:

$$z_i = x_i + y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Равенство (2), соответствующее содержательному смыслу «сложения» наборов, мы будем рассматривать в качестве определения суммы точек пространства благ. Легко проверить, что определенная таким образом операция сложения обладает обычными свойствами

$$X + Y = Y + X; \qquad (X + Y) + Z = X + (Y + Z),$$

что позволяет рассматривать суммы вида $X + Y + \ldots + W$, не заботясь ни о порядке слагаемых, ни о последовательности выполнения операций сложения.

В пространствах двух и трех измерений сложение можно определить чисто геометрически — с помощью «правила параллелограмма» (рис. 1а) или «параллельного переноса» (рис. 1б). Такое геометрическое определение равносильно определению (2). Правило «параллельного переноса» удобнее в том отношении, что может быть распространено на произвольное число слагаемых (рис. 1в).

Операцию вычитания можно определить как обратную по отношению к сложению. Будем называть точку Z *разностью* точек X и Y и обозначать $Z = X - Y$, если $Z + Y = X$. При этом

$$z_i = x_i - y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

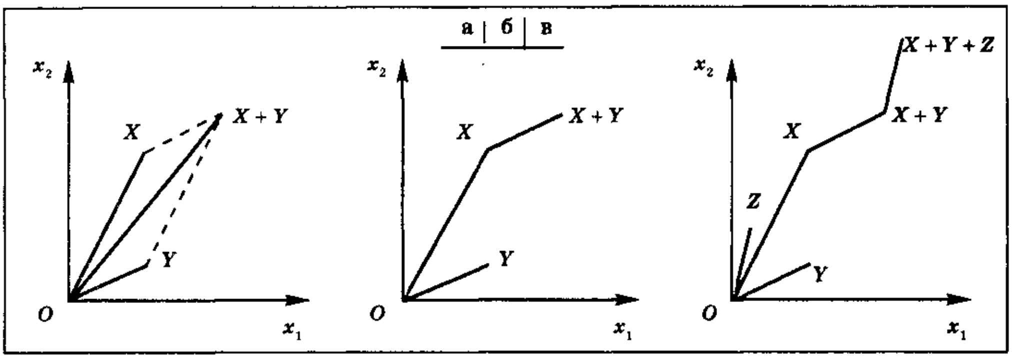


Рис. 1. Сложение элементов двумерного пространства: а) правило параллелограмма; б) правило параллельного переноса для двух слагаемых; в) правило параллельного переноса для произвольного числа слагаемых

Особую роль в нашем пространстве играет *нулевой элемент* $O=(0,0,...,0)$ — «начало координат». Для любого X справедливы равенства $X+O=X$, $X-X=O$.

Для каждого элемента X существует *противоположный элемент*, который мы будем обозначать $-X$; мы можем определить его следующим образом: $-X=O-X$. Чтобы перейти от точки X к точке $-X$, нужно знаки всех ее компонент изменить на противоположные. Точка $-X$ симметрична точке X относительно начала координат O.

Следующая арифметическая операция — *умножение* элемента пространства *на число*. Для любого вещественного числа α определим произведение $\alpha X=Y$ как такую точку, для которой

$$y_i = \alpha x_i, \qquad i=1,2,...,n. \tag{4}$$

В пространствах двух и трех измерений произведению вектора на число можно дать простое геометрическое определение (см. рис. 2). Соединим начало координат и точку X прямой и отложим на ней отрезок длиной $|OY| = |\alpha||OX|$ в направлении X, если $\alpha > 0$, или в противоположном направлении, если $\alpha < 0$.

Советуем вам самостоятельно убедиться в том, что введенные нами операции обладают следующими свойствами:

а) $\alpha(X+Y)=\alpha X+\alpha Y$;
б) $(\alpha+\beta)X=\alpha X+\beta X$;
в) $\alpha(\beta X)=(\alpha\beta)X$;
г) $0X=O$;
д) $1X=X$;
е) $(-1)X=-X$;
ж) если m — натуральное число, то $mX=\underbrace{X+X+...+X}_{m\ \text{раз}}$.

Если в «обычном» пространстве к каким-либо точкам X, Y, Z прибавить одну и ту же точку C, то точки $X'=X+C$, $Y'=Y+C$, $Z'=Z+C$ сохранят взаимное расположение исходных точек X, Y, Z и лишь переместятся в направлении отрезка OC на расстояние, равное длине этого отрез-

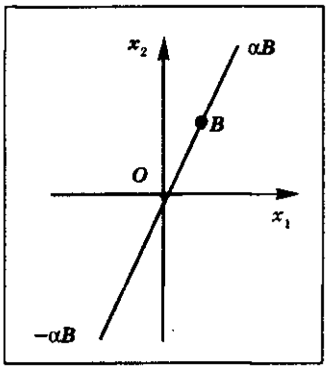


Рис. 2. Умножение элемента двумерного пространства на число ($\alpha > 0$)

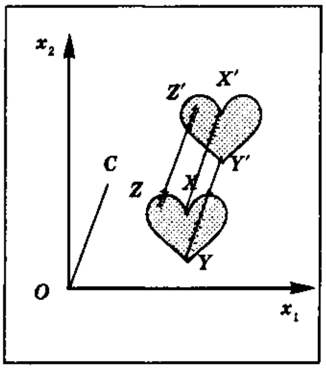


Рис. 3. Сдвиг на плоскости

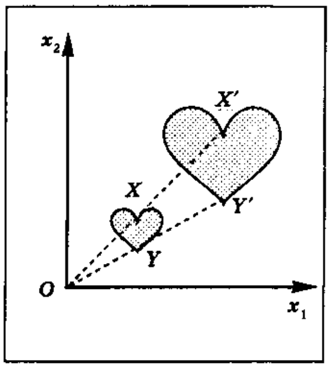


Рис. 4. Гомотетия на плоскости

ка (рис. 3). Таким образом может быть определена операция параллельного переноса некоторого множества (фигуры): перенос — это прибавление ко всем элементам множества одного и того же элемента C.

Если же все элементы некоторого множества умножить на одно и то же число, то мы получим фигуру, подобную исходной и расположенную «подобным образом». Такое преобразование в геометрии называется гомотетией с центром O и коэффициентом α (рис. 4).

Введенные выше операции над элементами пространства благ имеют смысл при любой размерности пространства; это позволяет нам использовать соответствующие геометрические термины (перенос, гомотетия), понимая их как результаты соответствующих арифметических действий.

Функции и поверхности в пространстве благ

Представьте себе, что в вашей комнате есть камин. В морозный день у камина будет тепло, а у окна — холодно. В каждой точке вашей комнаты будет какая-то температура. Мы можем считать температуру t функцией точки в пространстве вашей комнаты: $t = \varphi(X)$. Но можем ввести в комнате декартовы координаты и рассматривать температуру как функцию трех переменных — координат точки: $t = \varphi(x_1, x_2, x_3)$. Между этими описаниями существует простое соответствие — точка и ее координаты взаимно однозначно определяют друг друга.

Подобно этому, величину, зависящую от количеств различных благ, можно рассматривать и как функцию n переменных — количеств этих благ $x_1, x_2, ..., x_n$, и как функцию набора, то есть точки в пространстве благ:

$$\varphi(X) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Множество точек, в которых функция принимает одно и то же значение $\varphi(X) = a$, называют *поверхностью уровня* функции. Поверхность уровня разделяет пространство на две части, в одной из которых $\varphi(X) < a$, а в другой $\varphi(X) > a$. Если, например, функция $\varphi(X)$ описывает количественную полезность наборов, то поверхность уровня содержит такие наборы, полезность которых равна одной и той же величине, то есть она является поверхностью безразличия (в кардиналистском смысле). Позже мы обсудим свойства поверхностей безразличия, отказавшись от количественного представления полезности.

Особый интерес представляют линейные функции в пространстве благ. *Линейной* будем называть функцию, имеющую вид

$$l(X) = b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n. \quad (5)$$

Различным наборам коэффициентов $b_1, b_2, ..., b_n$ соответствуют разные линейные функции.

Поверхность уровня линейной функции на плоскости — это прямая, описываемая уравнением

$$b_1x_1 + b_2x_2 = a.$$

В трехмерном пространстве — это плоскость, удовлетворяющая уравнению

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = a.$$

В пространстве n измерений поверхность уровня линейной функции также будем называть *плоскостью*, хотя она отличается от обычной плоскости тем, что имеет не два, а $n - 1$ измерений (плоскость, размерность которой на единицу меньше размерности пространства, называют также гиперплоскостью).

Если цены p_i, по которым приобретаются блага, не зависят от объемов покупок, то затраты на приобретение набора X — линейная функция

$$s(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n.$$

Если m — денежный доход потребителя, то уравнение $s(X) = m$ описывает его *бюджетную плоскость* — аналог бюджетной линии из лекции 14. Бюджетная плоскость отсекает от координатных осей отрезки длиной m/p_i; ее положение в трехмерном пространстве показано на рис. 5. Покупательские возможности при доходе m описываются неравенством $s(X) \le m$ вместе с неравенствами $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0$, выражающими неотрицательность объемов покупок.

Из определения (5) следует, что всякая линейная функция обладает свойствами

$$l(X + Y) = l(X) + l(Y); \quad (6)$$

$$l(\alpha X) = \alpha l(X). \quad (7)$$

Убедиться в этом вы можете самостоятельно.

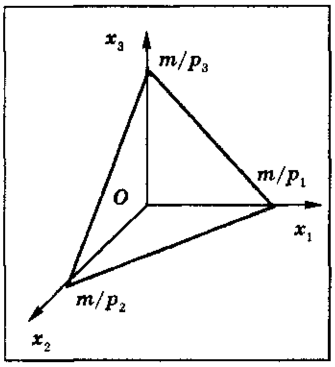


Рис. 5. Бюджетная плоскость в трехмерном пространстве

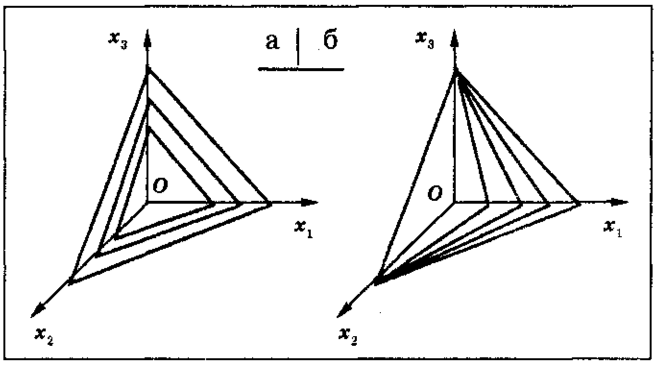


Рис. 6. Изменение положения бюджетной плоскости при изменении дохода (а) и при изменении цены 1-го продукта (б)

Часто линейную функцию определяют как такую функцию, которая для любых точек X и Y и любого числа α обладает свойствами (6) и (7). Можно доказать, что любая такая функция может быть представлена в виде (5), так что оба определения эквивалентны.

Прямые и кривые

Допустим, что в момент времени t потребление некоторого человека определялось точкой $X(t)$ в пространстве благ и с течением времени изменялось. Тогда при изменении времени t от t_0 до t_1 точка $X(t)$ будет смещаться из положения $X(t_0)$ в положение $X(t_1)$, прочертив в пространстве некоторую *кривую*. Этот пример показывает, каким образом могут задаваться различные кривые в пространстве благ. Если все координаты являются функциями одной и той же вещественной переменной

$$x_i = x_i(\alpha), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

то мы можем положение точки также рассматривать как значение функции того же параметра:

$$X(\alpha) = (\, x_1(\alpha), x_2(\alpha), \ldots, x_n(\alpha)\,).$$

И если параметр α принимает все значения из некоторого множества, например, интервала или всей числовой прямой (как говорят, «пробегает» это множество), то переменная точка $X(\alpha)$ «прочерчивает» некоторую кривую, конечную или бесконечную.

Прямые являются частным случаем кривых, и их можно задавать только что описанным способом.

Понятие прямой в n-мерном пространстве введем в два этапа.

Возьмем произвольную точку B и воспользуемся рассмотренной выше операцией умножения вектора на число. Под прямой, проходящей через начало координат O и точку B будем понимать множество точек

$$X(\alpha) = \alpha B,$$

где α пробегает всевозможные числовые значения. Если α принимает только неотрицательные значения, то точки $X(\alpha)$ образуют *луч*, исходящий из начала координат и проходящий через точку B. А если α пробегает интервал $[0, 1]$, то — *отрезок*, соединяющий O и B.

Для того чтобы получить прямую, не проходящую через начало координат, можно взять прямую вида αB и «сдвинуть» ее. Операцию параллельного переноса, или сдвига, некоторого множества мы также рассмотрели раньше: ей соответствует прибавление ко всем элементам множества одного и того же элемента пространства благ. Таким образом, множество точек вида

$$X(\alpha) = A + \alpha B \tag{8}$$

образует некоторую прямую в пространстве благ. Так как $X(0) = A$, $X(1) = A + B$, эта прямая проходит через точки A и $A + B$. Если α принимает значения на отрезке $[0,1]$, то точки вида (8) располагаются на отрезке, соединяющем точки A и $A + B$.

Любые две точки пространства благ можно соединить прямой. Рассмотрим произвольные точки U и V. Положим в равенстве (8) $A = U$, $A + B = V$. Отсюда $B = V - U$, и мы получаем выражение для точек искомой прямой:

$$X(\alpha) = U + \alpha(V - U),$$

или

$$X(\alpha) = (1 - \alpha)U + \alpha V. \tag{9}$$

При $0 \le \alpha \le 1$ точки вида (9) располагаются на отрезке, соединяющем точки U и V.

Отрезки в пространстве благ представляют особый интерес. Рассмотрим два набора U и V и образуем из них «смесь», или «промежуточный» набор. Для этого возьмем долю α набора V и дополнительную долю $(1 - \alpha)$ набора U и соединим их вместе. Мы получим набор, в который каждое из благ входит в количестве

$$w_i = (1 - \alpha)u_i + \alpha v_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом мы получим набор W, лежащий на отрезке, соединяющем исходные наборы U и V. Смешивая исходные наборы в различных пропорциях, мы можем пройти весь отрезок UV.

Понятие отрезка позволяет придать строгий смысл слову «между». Будем говорить, что набор W располагается между наборами U и V, если он располагается на отрезке UV, или, иными словами, если существует число α на интервале $[0, 1]$, такое, что $W = (1 - \alpha)U + \alpha V$.

Упражнение. Советуем вам убедиться в том, что наборы B, C, D, E из таблицы 1 лежат между наборами A и F. Найдите соответствующие значения параметра α.

Упражнение. Докажите теорему: если точки A и B принадлежат некоторой плоскости, то все точки прямой AB расположены в этой плоскости.

Таблица 1

Номер продукта	Наборы						Шаг
	A	B	C	D	E	F	
1	30	40	50	60	70	80	10
2	40	35	30	25	20	15	–5
3	5	6	7	8	9	10	1
4	18	16	14	12	10	8	–2

Выпуклость

С понятием отрезка связано другое понятие — выпуклости. В математическом приложении «Выпуклые множества и функции», помещенном в прошлом номере «Э. Ш.», было приведено определение выпуклого множества на плоскости. Теперь мы можем распространить его на пространство любой размерности:

множество точек называется выпуклым, если оно обладает следующим свойством: отрезок, соединяющий любые две точки этого множества, целиком содержится в этом множестве.

Свойства выпуклых множеств, о которых говорится в упомянутой статье, имеют место и для выпуклых множеств в пространстве благ любой размерности, хотя некоторые формулировки следует перевести с «плоского» на «n-мерный» язык. Например, плоскость разделяется на две части прямой, а рассматриваемое здесь пространство — гиперплоскостью. Остальные свойства могут быть перенесены без всяких изменений.

Предпочтения в пространстве благ

В лекции 13 обсуждается подход к описанию рационального поведения потребителя, не использующий количественного представления полезности и базирующийся лишь на способности потребителя сопоставить два любых набора благ и либо установить, какому из них отдать предпочтение, либо признать их равноценными. Мы будем здесь использовать следующие символы для описания соответствующих отношений:

$A \succcurlyeq B$ означает «A не хуже, чем B»;
$A \succ B$ — «A лучше, чем B»;
$A \sim B$ — «A столь же привлекательно, как B».

В дальнейшем будем использовать слова «улучшение», «ухудшение» и т. д. в смысле отношения предпочтения, которым руководствуется данный потребитель. В таком же значении будем говорить о «возрастании» и «убывании полезности», не вкладывая в эти выражения количественного смысла.

Сформулируем некоторые основные свойства потребительских предпочтений, рассматривая их как отношения между элементами пространства благ.

1. Если $x_i \geq y_i$, $i = 1, ..., n$, то $X \succcurlyeq Y$. Если к тому же $X \neq Y$, то $X \succ Y$. Это свойство характеризует монотонность предпочтения по каждой координате. Его называют *ненасыщаемостью* потребителя.

2. Если $U \prec C \prec V$, то на отрезке UV существует точка W, такая, что $W \backsim C$. Иными словами, если точки U и V расположены в различных частях, на которые пространство делится множеством безразличия, то отрезок UV пересекает это множество. Это свойство характеризует *непрерывность предпочтения*.

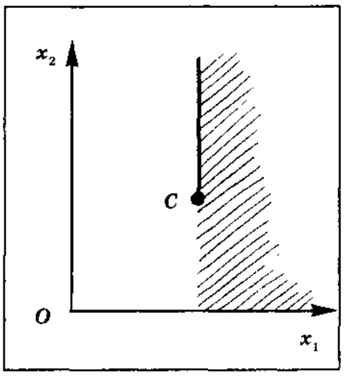


Рис. 7. Лексикографическое упорядочение

Отмеченное свойство на первый взгляд кажется само собой разумеющимся. Тем не менее существуют такие предпочтения, для которых оно не имеет места. Примером может служить так называемое *лексикографическое (алфавитное)* упорядочение:

$X \succ Y$, если $x_1 > y_1$
или $x_1 = y_1$ и $x_2 > y_2$,
или $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ и $x_3 > y_3$,
....
или $x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_{n-1} = y_{n-1}$ и $x_n > y_n$.

На рис. 7 выделено множество элементов, предпочтительных по отношению к C: это полуплоскость, расположенная правее C, и луч над C. Каждое множество безразличия при этом состоит из единственной точки.

Непрерывность — чрезвычайно важное свойство предпочтения. Из него, в частности, следует существование функции полезности $u(X)$, значения которой согласованы с предпочтениями: $u(X) > u(Y)$ тогда и только тогда, когда $X \succ Y$.

Постарайтесь доказать это утверждение самостоятельно, последовательно рассмотрев следующие положения.

Пусть B — вектор, все компоненты которого положительны, а R — луч, состоящий из точек вида αB, $\alpha \geq 0$.

1) для любого X с неотрицательными компонентами на луче найдутся точки U, V, такие, что $U \prec X \prec V$;

2) на луче R найдется точка W, такая, что $W \backsim X$. Иными словами, луч R пересекает все множества безразличия;

3) построим функцию $u(X)$ следующим образом. Возьмем такое число α, что $X \backsim \alpha B$ (в силу п. 2 для любого X такое число обязательно найдется). Положим $u(X) = \alpha$;

4) если $\alpha > \beta$, то $\alpha B \succ \beta B$, и обратно;

5) если $u(X) > u(Y)$, то $X \succ Y$, и обратно, то есть построенная в п. 3 функция есть функция полезности.

Если существует хотя бы одна функция полезности, то их существует бесконечно много: если $\varphi(u)$ — монотонно возрастающая функция, то $u^*(X) = \varphi(u(X))$ — также функция полезности.

Непрерывность — существенное условие существования функции полезности. Если бы предпочтение не было непрерывным, то функция полезности могла бы не существовать. Доказано, например, что для лексикографического упорядочения не существует функция полезности.

Существование функции полезности позволяет утверждать, что множество безразличия — это множество, удовлетворяющее уравнению $u(X) = c$, где c — константа. Иными словами, множество безразличия — это поверхность уровня функции полезности. Поэтому в дальнейшем мы с полным правом можем говорить о *поверхности безразличия*.

3. Отказ от количественного измерения полезности требует заменить закон убывающей предельной полезности (поскольку она также неизмерима) таким допущением о предпочтениях, которое так же согласовывалось бы с наблюдаемыми эффектами поведения потребителя.

В лекции 13 было показано, что для двух продуктов эквивалентом закона убывающей предельной полезности служит закон убывающей нормы замещения. При движении вдоль кривой безразличия в направлении возрастания x_1 и убывания x_2 абсолютное значение отношения приращений $\Delta x_2/\Delta x_1$ снижается: при бо́льших значениях x_1 и меньших значениях x_2 все меньшие по модулю приращения Δx_2 компенсируются одним и тем же приращением Δx_1.

Продолжим рассмотрение двумерного случая и выясним, как будет изменяться полезность, если мы будем двигаться не по кривой безразличия, а по некоторой прямой. При этом отношение $\beta = \Delta x_2/\Delta x_1$ будет оставаться постоянным. Для нас будет важен следующий факт: если, начав движение с некоторой точки, мы, сделав маленький шаг, не получим улучшения набора, то при дальнейшем движении наборы будут монотонно ухудшаться.

Для направлений, в которых x_1 и x_2 оба возрастают или оба убывают, утверждение непосредственно следует из монотонности предпочтений. Поэтому ограничимся случаем, когда одна из координат (для определенности, x_1) возрастает, а другая — убывает.

Пусть, отправляясь из точки A, после первого шага мы попали в точку B и при этом не произошло улучшения набора. Это значит, что в окрестности точки B норма замещения не больше коэффициента β: потеря $|\Delta x_2| = \beta\Delta x_1$ не перекрывается возрастанием объема первого блага на величину Δx_1. При переходе от B к C с ростом x_1 и снижением x_2 норма замещения уменьшится, станет наверняка меньше, чем β, а поэтому $C \prec B$.

Теперь мы можем сказать, как будет изменяться полезность наборов на отрезке прямой. Здесь возможны два случая:

а) при движении вдоль отрезка наборы монотонно улучшаются (в противоположном направлении — монотонно ухудшаются);

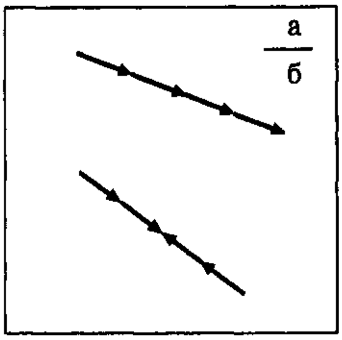


Рис. 8. Изменение полезности на отрезке. Стрелки показывают направление возрастания полезности

б) наборы вначале будут улучшаться, а после прохождения некоторой точки — ухудшаться (и то же самое будет происходить при движении в противоположном направлении).

Эти случаи схематически представлены на рис. 8.

Наилучшая точка отрезка может быть и внутренней, и конечной, а наихудшая располагается обязательно на конце отрезка. Не исключено, что оба конца окажутся «одинаково плохими».

Перейдем теперь к n-мерному случаю. Возьмем два произвольных набора благ U и V. Потребитель может рассматривать наборы U, взятые в некотором количестве, как благо одного вида, а взятые в некотором количестве наборы V — как благо второго вида; назовем их «комплектное благо 1» и «комплектное благо 2». Теперь обсуждаемое допущение можно сформулировать следующим образом: при замене любого комплектного блага любым другим норма замещения убывает с увеличением объема замещаемого блага.

Рассмотрим множество Ω наборов, включающих только комплектные блага 1 и 2 в произвольных количествах. Все такие наборы имеют вид $X = \beta_1 U + \beta_2 V$, где β_1 и β_2 — неотрицательные числа, выражающие количества комплектных благ. Отрезок UV состоит из точек вида $(1-\alpha)U + \alpha V$, причем $\alpha \geq 0$ и $1 - \alpha \geq 0$, так что отрезок UV целиком содержится в множестве Ω. Но множество Ω — это двухпродуктовое пространство, в котором существуют только комплектные блага 1 и 2. А мы уже знаем, что в двухпродуктовом пространстве закон убывающей предельной полезности имеет своим следствием тот факт, что наихудшая точка любого отрезка лежит на его конце.

Возьмем теперь в пространстве благ какую-либо поверхность безразличия и точку C на ней. Пусть $U \succcurlyeq C$ и $V \succcurlyeq C$, а точка X расположена на отрезке UV. Тогда обязательно имеет место отношение $X \succcurlyeq C$ — ведь наихудшая точка отрезка UV — это U или V.

Таким образом, если U и V принадлежат множеству точек, не уступающих точкам данной поверхности безразличия, то и весь отрезок UV также принадлежит этому множеству. А это означает, что закон убывающей предельной полезности в пространстве благ любой размерности «выглядит» точно так же, как и в пространстве двух благ: множество наборов, не менее предпочтительных, чем лежащие на данной поверхности безразличия, выпукло.

Задача Лагранжа

Безусловный и условный экстремумы

Важное место в математическом аппарате экономики занимают оптимизационные задачи — задачи, в которых ищется наилучшее в определенном смысле решение. В экономической практике требуется использовать имеющиеся ресурсы наиболее выгодным образом. В экономической теории одним из отправных пунктов является постулат о том, что каждый экономический субъект, имея определенную свободу выбора своего поведения, отыскивает наилучший со своей точки зрения вариант. И оптимизационные задачи служат средством описания поведения экономических субъектов, инструментом исследования закономерностей этого поведения.

Многие задачи оптимизации формулируются следующим образом. Решение, которое должен принять субъект, описывается набором чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ (или точкой $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ n-мерного пространства). Достоинства того или иного решения определяются значениями функции $f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ — *целевой функции*. Наилучшее решение — это такая точка X, в которой функция $f(X)$ принимает наибольшее значение. Задача нахождения такой точки описывается следующим образом:

$$f(X) \to \max.$$

Если функция $f(X)$ характеризует отрицательные стороны решения (ущерб, убытки и т. п.), то ищется точка X, в которой значение $f(X)$ минимально:

$$f(X) \to \min.$$

Минимум и максимум объединяются понятием экстремума. Для определенности мы в этой статье будем говорить только о задачах максимизации. Поиск минимума не требует специального рассмотрения, поскольку заменой целевой функции $f(X)$ на $-f(X)$ всегда можно «превратить недостатки в достоинства» и свести минимизацию к максимизации.

Из каких вариантов должен быть выбран наилучший? Иными словами, среди каких точек пространства нужно искать оптимум? Ответ на этот вопрос связан с таким элементом оптимизационной задачи, как *множество допустимых решений*. В некоторых задачах допустимыми являются любые комбинации чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, то есть множество допустимых решений — это все рассматриваемое пространство.

В других задачах следует принимать во внимание различные *ограничения*, означающие, что не все точки пространства доступны при выборе. В содержательных постановках задач это может быть связано, например, с ограниченностью располагаемого количества ресурсов.

Ограничения могут быть представлены в форме равенств вида

$$g(X) = 0$$

или неравенства

$$g(X) \geq 0 .$$

Если условия имеют несколько другую форму, скажем, $g_1(X) = g_2(X)$ или $g(X) \leq A$, то их можно привести к стандартному виду, перенеся все функции и константы в одну из частей равенства или неравенства.

Экстремум, отыскиваемый во всем пространстве, без каких-либо ограничивающих условий, носит название *безусловного*. Если целевая функция непрерывно дифференцируема, то, как известно из общего курса математического анализа, необходимое условие безусловного экстремума функции состоит в равенстве нулю всех ее частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

(для упрощения записи мы иногда будем опускать обозначения аргументов).

Если же заданы ограничения, то экстремум ищется лишь среди точек, которые удовлетворяют всем ограничениям задачи, так как только такие точки являются допустимыми. В этом случае экстремум носит название *условного*.

Чрезвычайно полезным средством экономического анализа оказалась задача поиска условного экстремума:

$$f(X) \to \max$$

при условиях (2)

$$g_1(X) = 0;\ g_2(X) = 0;\ \ldots\ g_n(X) = 0 ,$$

все ограничения которой представляют собой равенства.

Если при этом целевая функция и все ограничивающие функции непрерывно дифференцируемы, то такую задачу мы будем называть *задачей Лагранжа*.

Задача Лагранжа с одним ограничением

В настоящем пункте будет рассмотрена задача, имеющая следующую структуру:

$$f(X) \to \max$$

при условии (3)

$$g(X) = 0 .$$

Для иллюстрации некоторые авторы приводят такой пример. По склону горы идет дорога, требуется найти на ней самую высокую точку. На рис. 1 представлена карта местности с нанесенными на нее линиями равных высот; синяя линия — это дорога. Точка M, в которой дорога касается одной из линий уровня, — это и есть наивысшая точка дороги.

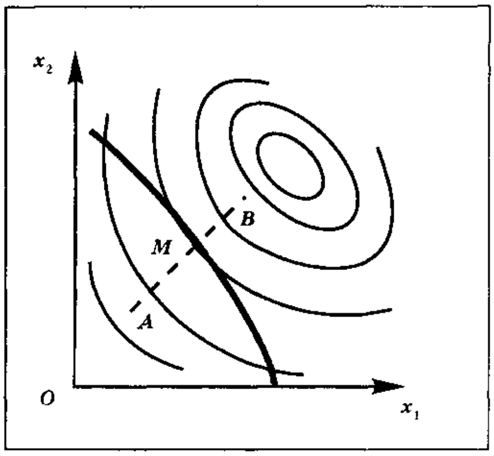


Рис. 1. Задача о дороге на склоне горы

Если $X = (x_1, x_2)$ — точка плоскости, x_1 и x_2 — ее координаты, то задаче можно придать следующую форму. Пусть $f(X)$ — высота точки X над уровнем моря, а уравнение $g(X) = 0$ описывает дорогу. Тогда наивысшая точка дороги — решение задачи (3).

Если бы дорога проходила через вершину горы, то ее высшая точка была бы самой высокой точкой местности, и ограничение можно было бы не принимать во внимание.

Если же дорога не проходит через вершину, то, немного уклонившись от дороги, можно было бы подняться выше, чем двигаясь строго по дороге. Отклонение от дороги соответствует попаданию в такие точки, где $g(X) \neq 0$; при малых отклонениях достижимую при этом высоту можно приближенно считать пропорциональной отклонению.

Идею решения задачи Лагранжа можно представить следующим образом: можно попытаться «исправить»рельеф местности так, чтобы отклонение от дороги не давало преимуществ в достижении высоты. Для этого нужно заменить высоту $f(X)$ функцией

$$L(X) = f(X) - \lambda g(X),$$

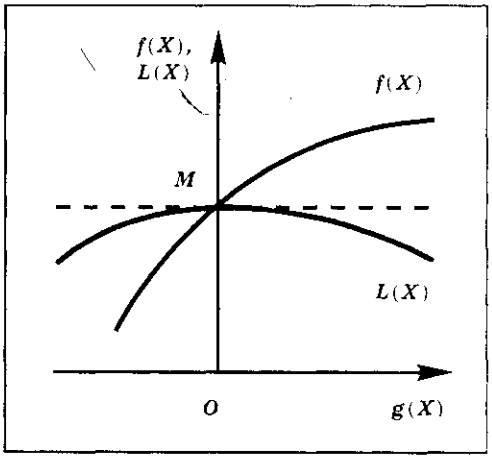


Рис. 2. Разрез горы по AB

где множитель λ подбирается таким образом, чтобы участок склона в окрестности точки M стал горизонтальным (слишком малое значение λ не устранит преимуществ отклонений от дороги, а слишком большое — придаст преимущества отклонениям в противоположную сторону).

Теперь, поскольку рельеф $L(X)$ делает площадку в окрестности точки оптимума горизонтальной, эта точка удовлетворяет равенствам

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0,$$

а так как точка лежит на дороге, то — и ограничению $g(X) = 0$.

Пример с горой и дорогой — лишь иллюстрация идеи; точно так же двумерный случай использован исключительно для наглядности. Подобным образом можно было бы рассуждать и в общем, n-мерном случае.

Справедливо следующее утверждение:

Если $f(x_1,...,x_n)$ и $g(x_1,...,x_n)$ — непрерывно дифференцируемые функции всех своих аргументов, то решение задачи

$$f(x_1,...,x_n) \to \max$$

при условии

$$g(x_1,...,x_n) = 0$$

удовлетворяет равенствам

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,...,n; \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \tag{5}$$

где

$$L(x_1,...,x_n;\lambda) = f(x_1,...,x_n) - \lambda g(x_1,...,x_n).$$

Функция $L(X;\lambda)$ получила название *функции Лагранжа* (или *лагранжиана*) задачи (3), а коэффициент λ — *множителя Лагранжа*.

Заметим, что равенство (5) — это представленное в другой форме ограничение $g(X) = 0$.

Приведенные выше рассуждения, разумеется, не являются доказательством сформулированного здесь утверждения; они лишь помогают понять существо метода: составляющая $\lambda g(X)$ в составе функции Лагранжа должна уравновешивать возможное увеличение максимального значения функции $f(X)$ при малом отклонении (на единицу) значений функции $g(X)$ от нуля. Это обстоятельство в дальнейшем будет весьма полезно при обсуждении смысла множителя Лагранжа.

Рассмотрим чрезвычайно простой пример. Веревкой длины A требуется огородить на берегу моря прямоугольный участок наибольшей площади (берег считается прямолинейным).

Это один из вариантов так называемой задачи Дидоны. Дидона, сестра тирского царя, — легендарная основательница и первая властительница Карфагена. Покинув родину и прибыв в Северную Африку, она купила у местных жителей прибрежный участок, который, по условию, можно огородить воловьей шкурой. Разрезав шкуру на тонкие ремешки, она связала из них тонкую веревку. Остальное — геометрическая задача: огородить участок наибольшей возможной площади.

Обозначим стороны прямоугольника x_1 и x_2 (см. рис. 3). Решим сначала задачу без использования метода Лагранжа.

Очевидно, $x_2 = A - 2x_1$, и площадь прямоугольника равна $S = x_1 x_2 = x_1(A - 2x_1)$. Рассматривая ее как функцию одного аргумента x_1, нетрудно найти его значение, при котором площадь максимальна: $x_1 = A/4$. Отсюда $x_2 = A/2$. Максимальная площадь равна $S^* = A^2/8$.

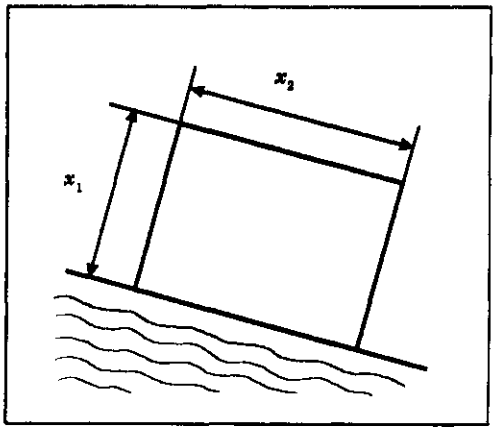


Рис. 3. К задаче Дидоны

Теперь рассмотрим эту же задачу в форме задачи Лагранжа:

$$x_1 x_2 \to \max$$

при условии

$$2x_1 + x_2 - A = 0$$

Лагранжиан этой задачи равен

$$L(x_1, x_2; \lambda) = x_1 x_2 - \lambda(2x_1 + x_2 - A),$$

и условия экстремума имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 2\lambda = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda = 0,$$

так что

$$\begin{aligned} x_2 &= 2\lambda \\ x_1 &= \lambda \\ 2x_1 + x_2 &= A. \end{aligned}$$

Подставляя значения x_1 и x_2 из первого и второго равенств в третье, находим, что $4\lambda = A$, откуда

$$\lambda = A/4; \qquad x_1 = A/4; \qquad x_2 = A/2,$$

как и при решении первым способом.

Этот пример показывает распространенный способ решения задачи Лагранжа. Соотношения (4) и (5) образуют систему уравнений относительно $x_1, \dots, x_n$ и λ. Система состоит из $n+1$ уравнения — n уравнений вида (4) и одно уравнение вида (5). Число уравнений равно числу неизвестных. Из уравнений вида (4) можно попытаться выразить каждую из неизвестных $x_1, \dots, x_n$ через λ, то есть решить ее как систему из n уравнений, рассматривая λ как параметр. Подставляя получившиеся выражения в уравнение (5) — напомним, что оно совпадает с ограничением, — получаем уравнение относительно λ. Решая его, находят λ, после чего определяются исходные неизвестные $x_1, ..., x_n$.

Смысл множителей Лагранжа

При решении задачи Лагранжа мы интересовались значениями $x_1, ..., x_n$; кроме того, нас могло интересовать экстремальное значение целевой функции $f(X)$. Но в процессе решения попутно было определено значение еще одной величины — множителя Лагранжа.

Оказывается, множитель Лагранжа — весьма существенная характеристика решаемой задачи. Чтобы смысл ее стал яснее, несколько изменим формулировку ограничения, ничего не изменяя по существу.

Типичная экономическая ситуация характеризуется тем, что приходится искать наиболее выгодное решение при ограниченном количестве некоторого ресурса. Если r — заданное количество ресурса, а функция $h(X)$ характеризует потребное его количество для достижения точки X, то ограничению естественно придать форму

$$h(X) \le r.$$

По характеру задачи часто бывает ясно, что для достижения оптимума ресурс нужно использовать полностью, так что ограничение может быть записано в виде равенства

$$h(X) = r. \tag{6}$$

Формально это условие можно представить в стандартной форме $g(X) = h(X) - r = 0$. Но значительный интерес представляет максимально достижимый уровень функции $f(X)$ в зависимости от имеющегося количества ресурса r. Обозначим

$$F(r) = \max\{\, f(X) \mid h(X) = r \,\}.$$

В правой части — принятое обозначение условного экстремума: после вертикальной черты выписывается условие.

Вспомним, что при обсуждении структуры лагранжиана мы интерпретировали $\lambda g(X)$ как составляющую, уравновешивающую возможный прирост максимума $f(X)$ при отклонении $g(X)$ от нуля. Но отклонение $g(X)$ от нуля есть отклонение $h(X)$ от r. Если располагаемое количество ресурса получает приращение Δr, то мы должны ожидать приращение максимума функции $f(X)$ на $\lambda \Delta r$.

В действительности это соотношение носит приближенный характер. Точный результат мы получили бы в пределе при $\Delta r \to 0$:

$$\frac{dF(r)}{dr} = \lambda. \tag{7}$$

Таким образом, множитель Лагранжа характеризует скорость изменения максимума целевой функции при изменении ограничивающей константы r в ограничении вида (6).

В рассмотренном в предыдущем пункте варианте задачи Дидоны ограниченным ресурсом была длина веревки A. Максимальная площадь оказалось равной $S(A) = A^2/8$. Отсюда $dS(A)/dA = A/4$, что в точности соответствует найденному при решении значению λ.

Приведем еще одно рассуждение в пользу такой трактовки множителя Лагранжа. Для всевозможных точек X найдем значения $f(X)$ и $h(X)$ и отложим эти значения в виде точек в декартовых координатах (рис. 4). Если при каждом значении $h(X)$ существует максимум функции $f(X)$, то все точки расположатся ниже некоторой кривой, показанной на рисунке жирной линией.

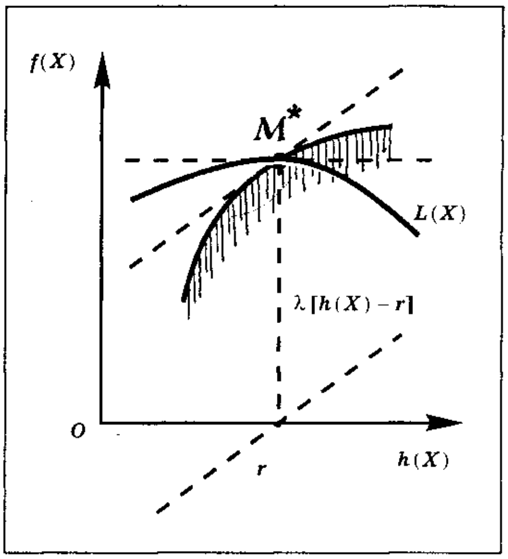


Рис. 4. К интерпретации множителя Лагранжа

Нас интересуют точки, соответствующие условию $h(X) = r$. Максимум $f(X)$ помечен точкой M^*; обозначим λ наклон кривой в этой точке. Если в качестве ординаты брать не $f(X)$, а $L(X; \lambda) = f(X) - \lambda [h(X) - r]$, то новая верхняя граница (синяя кривая) имела бы в точке M^* горизонтальную касательную. Это значит, что в исходном n-мерном пространстве соответствующая точка M — стационарная точка функции $L(X; \lambda)$ с данным значением параметра λ. Таким образом, λ — множитель Лагранжа.

Но жирная черная кривая — это график функции $F(r)$, а λ — его угловой коэффициент, откуда и следует равенство (7).

Рацион Робинзона

Обратимся теперь к задаче о потреблении примерно в таком виде, в каком ее ставил Госсен.

Человек может потреблять блага n видов в количествах x_i, $i = 1, \ldots, n$. Общая полезность потребления i-того блага описывается функцией $TU_i(x_i)$. Предельная полезность $MU_i(x_i) = dTU_i(x_i)/dx_i$ убывает с ростом x_i — в этом состоит закон Госсена. Полезность потребления всех благ суммируется по отдельным благам, так что

$$TU(X) = \sum_i TU_i(x_i)\,.$$

Будем считать, опять-таки следуя Госсену, что потребительские возможности человека ограничены лишь временем, которое он может затрачивать на добывание и потребление благ, как это имело место у Робинзона Крузо. Если на единицу i-того блага ему приходится тратить t_i единиц времени, то ресурсное ограничение выражается равенством

$$\sum_i t_i x_i = T, \tag{8}$$

где T — фонд времени, выделяемый на потребление благ.

Задача рационального потребления теперь сводится к определению такого «рациона» — набора благ $X = (x_1,...,x_n)$, — который доставляет максимум $TU(X)$ при ограничении (8).

Лагранжиан этой задачи:

$$L(X;\lambda) = \sum_i TU_i(x_i) - \lambda\Big[\sum_i t_i x_i - T\Big]\,.$$

Условия оптимума выражаются системой

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = MU_i(x_i) - \lambda t_i = 0, \qquad i = 1,...,n,$$

или

$$MU_i(x_i) = \lambda t_i, \qquad i = 1,...,n\,. \tag{9}$$

Итак, предельные полезности различных благ в точке оптимума пропорциональны удельным затратам времени. Это значит, что для любой пары благ (i,j) отношение их предельных полезностей равно отношению удельных затрат времени:

$$\frac{MU_i(x_i)}{MU_j(x_j)} = \frac{t_i}{t_j}\,.$$

А отсюда следует, что дополнительная малая порция времени (скажем, минута), затрачиваемая на любое из благ, дает один и тот же прирост полезности.

Величина этого прироста, как это следует из результата предыдущего пункта, определяется коэффициентом λ: если Робинзон сможет выделить на потребление благ дополнительно ΔT единиц времени, то общая полезность возрастет при этом на величину

$$\Delta TU \approx \lambda \Delta T\,. \tag{10}$$

Заметим, что убывание предельной полезности гарантирует единственность оптимума. Если взять другие значения x_i (обозначим их x_i'),

Таблица 1

Данные к задаче о рационе Робинзона

i	a_i	t_i
1	50	1
2	100	2
3	50	2

также удовлетворяющие условиям пропорциональности предельных полезностей удельным затратам времени:

$$MU_i(x_i') = \lambda_i' t_i ,$$

то либо $\lambda' > \lambda$, и тогда $x_i' < x_i$ для всех продуктов (предельная полезность убывает с ростом x_i); либо $\lambda' < \lambda$ — и тогда $x_i' > x_i$ для всех i. В первом случае потребное количество времени меньше T, во втором — больше, но ни в одном из них ограничение не будет выполнено.

Попутно отметим следующее обстоятельство. Система уравнений (9) определяет наилучший набор благ при любом фиксированном количестве T выделенного времени; с величиной T связано лишь численное значение λ. Считая величину T переменной, введем как в предыдущем пункте, функцию

$$F(T) = \max\{ TU(X) \mid \sum_i t_i x_i = T \},$$

которую можно трактовать как общую полезность времени. Это — «вторичная» полезность: ее величина определяется максимальной полезностью набора благ, достижимой при данном количестве выделенного времени. Точный смысл приближенного равенства (10) состоит в том, что

$$\frac{dF(T)}{dT} = \lambda ,$$

то есть λ — предельная полезность времени для Робинзона.

Как мы только что видели, сравнивая λ и λ' для различных наборов благ, чем больше T, тем меньше λ. Поскольку природа выделяемого ресурса несущественна, мы можем сделать следующий общий вывод:

если предельная полезность каждого блага снижается с ростом объема его потребления, а затраты ресурса пропорциональны объему, то предельная полезность ресурса падает с увеличением количества используемого ресурса.

Проиллюстрируем эти результаты числовым примером. Допустим, что Робинзон потребляет 3 вида благ, причем все частные функции полезности имеют один и тот же вид

$$TU_i(x_i) = a_i \ln(x_i + 1)$$

с различными коэффициентами a_i. Он может выделить на потребление 15 часов в сутки; остальные данные приведены в табл. 1.

Воспользуемся системой (9):

$$MU_i(x_i) = \frac{a_i}{x_i + 1} = \lambda t_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Отсюда

$$x_i = \frac{a_i}{\lambda t_i} - 1 .$$

Подставим числовые значения известных параметров:

$$x_1 = \frac{50}{\lambda \cdot 1} - 1 = \frac{50}{\lambda} - 1 ;$$

$$x_2 = \frac{100}{\lambda \cdot 2} - 1 = \frac{50}{\lambda} - 1 ;$$

$$x_3 = \frac{50}{\lambda \cdot 2} - 1 = \frac{25}{\lambda} - 1 .$$

Используем теперь ресурсное ограничение:

$$1 \cdot \left(\frac{50}{\lambda} - 1\right) + 2 \cdot \left(\frac{50}{\lambda} - 1\right) + 2 \cdot \left(\frac{25}{\lambda} - 1\right) = \frac{200}{\lambda} - 5 = 15,$$

откуда $\lambda = 200/(15+5) = 10$. Теперь найдем количество каждого блага:

$$x_1 = \frac{50}{10} - 1 = 4; \quad x_2 = \frac{50}{10} - 1 = 4; \quad x_3 = \frac{25}{10} - 1 = 1.5.$$

Остальные результаты расчета приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчетов в задаче о рационе Робинзона

i	x_i	$t_i x_i$	TU_i
1	4	4	80.5
2	4	8	160.9
3	1.5	3	45.8
Σ		15	287.2

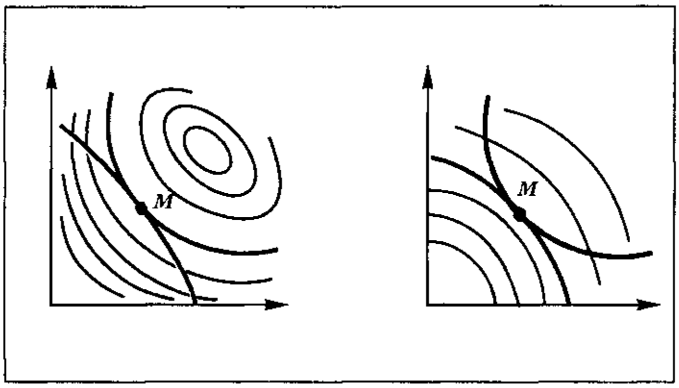
Вооружитесь микрокалькулятором и попробуйте построить другой набор, также требующий 15 часов. Убедитесь, что общая полезность будет меньше, чем 287.2 (или, в пределах точности расчета, — такая же).

Теперь замените $T = 15$ на $T = 16$ и повторите все расчеты. Полученное ранее значение $\lambda = 10$ говорит о том, что теперь полезность наилучшего набора возросла на 10 единиц. Расчет дает значение приращения 9.8. Новому, большему значению T соответствует уменьшившееся значение $\lambda = 9.52$.

Взаимные экстремальные задачи

Задачу Лагранжа с одним ограничением можно было бы записать в следующей форме:

$$\begin{gathered} f(X) - c \to \max \\ \text{при условии} \\ h(X) = r . \end{gathered} \tag{11}$$



а | б

Рис. 5. Пара взаимных задач. Черным показаны линии уровня функции $f(X)$, синим — функции $h(X)$

Вычитание константы c из целевой функции не изменяет положения оптимума. Лагранжиан этой задачи:

$$L(X;\lambda) = f(X) - c - \lambda[h(X) - r],$$

а условия оптимума имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda\frac{\partial h}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь задачу, в которой целевая и ограничивающая функции поменялись ролями:

$$h(X) - r \to \min$$

при условии (13)

$$f(X) = c.$$

Для новой задачи лагранжиан равен

$$L_1(X;\mu) = h(X) - r - \mu[f(X) - c],$$

а условие оптимальности —

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \mu\frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{14}$$

Задачи (11) и (13) называют взаимными по отношению друг к другу. Если, например, исходная задача состояла в максимизации полезности некоторого набора продуктов при заданном ресурсном ограничении, то взаимная задача состоит в минимизации расхода ресурса при обеспечении заданного уровня полезности.

Сравнение равенств (12) и (14) показывает, что условия оптимальности у обеих задач одни и те же: достаточно положить $\mu = 1/\lambda$, чтобы в этом убедиться. Если λ — предельная полезность ресурса, то μ можно было бы назвать «предельной ресурсоемкостью полезности».

Модель потребительского выбора

Перейдем к рассмотрению рационального потребительского выбора в пространстве благ с теми же отношениями предпочтения, о которых говорилось в лекции 13 и статье «Пространство благ».

Введем в рассмотрение функцию полезности $u(X)$, согласованную с предпочтениями данного потребителя: $u(X) > u(y)$ тогда и только тогда, когда $X \succ Y$. Функцию $u(X)$ будем считать непрерывно дифференцируемой.

При этих допущениях моделью потребительского оптимума служит задача Лагранжа

$$u(X) \to \max$$

при условии

$$\sum_i p_i x_i = m,$$

где p_i — цена i-го блага, а m — денежный доход потребителя. Условия оптимальности имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda p_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Введем для удобства обозначение $u_i = \partial u / \partial x_i$ и представим условия оптимальности в форме

$$u_i = \lambda p_i. \tag{15}$$

Формально эта система похожа на систему (9), описывающую оптимальность в задаче о рационе Робинзона. Но здесь имеются и существенные отличия. Во-первых, теперь мы отказались от предположения о суммируемости полезностей различных благ, и u_i — не производные полезностей отдельных благ, а лишь частные производные общей функции полезности. Во-вторых, $u(X)$ — это не полезность в некоторой абсолютной количественной шкале, а лишь функция, согласованная с предпочтениями и отражающая только порядковые отношения. Тем не менее перечень аналогичных свойств можно продолжить. Для любой пары благ (i,j) в точке оптимума должны выполняться соотношения

$$\frac{u_i}{u_j} = \frac{p_i}{p_j}. \tag{16}$$

Отметим, что выражение в левой части — это норма замещения i-го блага j-м при постоянстве объемов всех остальных благ: в пределах поверхности безразличия должно выполняться равенство

$$\Delta u \approx u_i \Delta x_i + u_j \Delta x_j = 0,$$

то есть

$$\frac{u_i}{u_j} = -\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}.$$

Как мы уже выяснили, значение множителя Лагранжа должно выражать предельную полезность лимитирующего ресурса, в данном случае — денежного дохода (или, проще, — предельную полезность денег). Но поскольку значения функции $u(X)$ не являются абсолютными значениями полезности, постольку и полная полезность денег

$$U(m) = \max \{ u(X) \mid \sum_i p_i x_i = m \}$$

имеет смысл лишь по отношению к выбранной шкале полезностей. То же относится и к предельной полезности денег.

Что произойдет, если функцию полезности $u(X)$ заменить равносильной ей функцией $u^*(X)$? Отношение предпочтения сохранится, если $u^*(X) = \varphi(u(X))$, где $\varphi(u)$ — монотонно возрастающая функция. Правило дифференцирования сложной функции позволяет утверждать, что

$$u_i^*(X) = \frac{\partial u^*(X)}{\partial x_i} = \varphi'(u) u_i(X),$$

где $\varphi'(u)$ — значение производной $d\varphi(u)/du$. Заметим, что множитель $\varphi'(u)$ является одним и тем же для всех благ. Поэтому условия оптимальности

$$u_i(X) = \lambda p_i$$

и

$$u_i^*(X) = \lambda^* p_i$$

определяют одно и то же положение потребительского оптимума в пространстве благ. Различаются лишь значения множителей Лагранжа:

$$\lambda^* = \varphi'(u)\lambda. \tag{17}$$

К этому результату можно подойти с другой стороны. Задавшись некоторым значением m дохода, при использовании функций $u(X)$ и $u^*(X)$ мы получим один и тот же оптимальный набор благ X_0. Общая полезность денег в одной шкале примет значение $U(m) = u(X_0)$, в другой — $U^*(m) = u^*(X_0) = \varphi(u(X_0))$. Таким образом, при любом уровне дохода

$$U^*(m) = \varphi(U(m)), \tag{18}$$

то есть общие полезности дохода в разных шкалах связаны между собой точно так же, как и полезности наборов благ. А так как множитель Лагранжа в рассматриваемой задаче — это предельная полезность денежного дохода, то, применяя к равенству (18) правило дифференцирования сложной функции, мы снова придем к равенству (17).

Нельзя ли выбрать такую функцию полезности $u^*(X)$, чтобы полезность дохода равнялась величине дохода, то есть $U^*(m) = m$? Можно. Если нам удалось, взяв какую-либо из функций полезности благ $u(X)$, получить функцию полезности дохода $U(m)$, то теперь нам остается определить функцию φ из условия $\varphi(U(m)) = m$, то есть функция φ должна быть обратной по отношению к $U(m)$. Так как $U(m)$ — возрастающая функция (почему?), функция φ оказывается также возрастающей, и $u^*(X) = \varphi(u(X))$ является функцией полезности. Для этой функции $\lambda^* = 1$ при любом уровне дохода, а условия оптимальности имеют особенно простой вид $u_i = p_i$.

Постарайтесь ответить на следующие вопросы:

1. Можно ли утверждать, что построенная таким образом функция полезности $u^*(X)$ «лучше» любых других и может служить для количественного измерения полезности? Прежде чем отвечать на этот вопрос, выясните, сохранятся ли эти хорошие свойства функции $u^*(X)$ при изменении цен.

2. Верно ли, что с увеличением дохода предельная полезность денег убывает? Нельзя ли подобрать такую функцию полезности благ, чтобы предельная полезность дохода росла вместе с доходом?

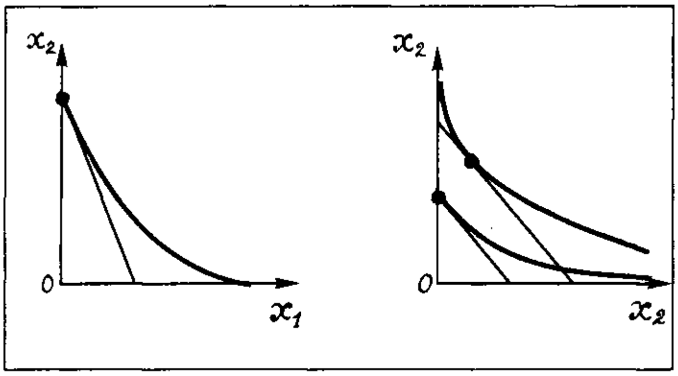


Рис. 6. При одном значении дохода решение оказывается угловым, при другом — внутренним

В заключение этого пункта заметим, что оптимум потребителя не всегда может быть определен в рамках задачи Лагранжа. Множество допустимых решений ограничено не только бюджетом потребителя, но и условиями неотрицательности объемов благ:

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ \ldots\ x_n \geq 0. \qquad (19)$$

Обратимся к материалам раздела 2 лекции 14. Если на бюджетной поверхности норма замещения каких-либо двух благ всюду больше или всюду меньше отношения цен, то равенство (16) не может выполняться ни в одной точке. Задача не имеет внутреннего решения, а имеет угловое решение. В рамках задачи Лагранжа не могут быть описаны решения, которые лежат на границах области, определяемой неравенствами.

Анализ задач, в которых существенны ограничения вида (19) или другие ограничения-неравенства, требует иных средств. Такие средства существуют — это теорема Куна—Таккера и связанные с ней методы анализа и решения экстремальных задач. О них пойдет речь в одном из последующих выпусков журнала.

Проанализируйте задачу о рационе Робинзона, изменив одно из данных: возьмите $t_1 = 10$.

Задача Лагранжа с несколькими ограничениями

При рассмотрении задачи Лагранжа с одним ограничением нам удалось обсудить основные свойства самой задачи, ее решений и некоторые следствия в сфере экономических приложений.

Задача с несколькими ограничениями имеет вид (2); но по тем же соображениям, по которым ограничение в форме (6) оказалось предпочтительнее равенства $g(X) = 0$, задачу с несколькими ограничениями мы также представим в виде

$$f(X) \to \max$$

при условии (20)

$$h_k(X) = r_k, \qquad k = 1, \ldots, K.$$

Эта задача имеет много общих черт с уже рассмотренной задачей с одним ограничением. Поэтому мы без обсуждения приведем формулировку основной теоремы:

оптимальное решение задачи (20) удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n\,; \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, K\,, \tag{22}$$

где

$$L(X; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = f(X) - \sum_{k=1}^{K} \lambda_k [\, h_k(X) - r_k \,].$$

Каждое из условий (22) совпадает с k-м ограничением. Добавление к системе ограничения ведет к появлению в составе функции Лагранжа слагаемого $-\lambda_k [\, h_k(X) - r_k \,]$.

Смысл множителей Лагранжа — тот же, что и в задаче с одним ограничением. Если, как и раньше, ввести обозначение для наибольшего значения $f(X)$, достижимого при данных значениях r_k,

$$F(r_1, r_2, \ldots, r_k) = \max \{\, f(X) \mid h_k(X) = r_k,\ k = 1, \ldots, K \,\},$$

то

$$\frac{\partial F}{\partial r_k} = \lambda_k\,.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим поведение потребителя, выбор которого ограничен и денежным доходом, и временем, которое он может выделить на приобретение и потребление благ. Затраты времени могут быть существенными и в связи с тем, что процесс потребления может быть длительным (это относится к некоторым видам услуг), и в связи с необходимостью тратить время на стояние в очередях. Как и в задаче о рационе Робинзона, будем считать, что затраты времени на приобретение i-го блага пропорциональны его объему, и обозначим t_i удельные затраты времени. Но теперь мы можем считать, что некоторые из t_i равны нулю.

Теперь рациональный выбор — это решение задачи

$$u(X) \to \max$$

при условиях

$$\sum_i p_i x_i = m\,;$$
$$\sum_i t_i x_i = T\,.$$

Лагранжиан этой задачи:

$$L(X;\lambda,\mu) = u(X) - \lambda\left[\sum_i p_i x_i - m\right] - \mu\left[\sum_i t_i x_i - T\right]\,.$$

Условия оптимальности имеют вид:

$$u_i = \lambda p_i + \mu t_i, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Здесь в правой части стоит все, чем «расплачивается» потребитель: деньги (с коэффициентом λ) и время (с коэффициентом μ). Множители Лагранжа λ и μ характеризуют предельные полезности денег и времени по отношению к выбранной функции полезности $u(X)$. Отношение μ/λ имеет размерность *руб./час* и выражает полезность времени в денежной форме.

Зависит ли отношение μ/λ от того, какая из эквивалентных функций полезности использована в качестве целевой функции?

Что дает сопоставление отношения μ/λ с часовой ставкой заработной платы, имеющей ту же размерность?

Аддитивные функции

1. В настоящем приложении доказываются утверждения, сформулированные в разделе 2 лекции 18 и относящиеся к аналитическому выражению функции роста вклада. Одним из основных элементов построения функции роста было рассмотрение условия аддитивности. Под *аддитивной функцией* понимают функцию, которая для любых значений аргумента x, y удовлетворяет соотношению

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,. \tag{1}$$

Соотношения, связывающие значения неизвестной функции при различных значениях аргумента, называют функциональными уравнениями. Примером функционального уравнения является равенство (1).

Легко проверить, что при любом значении коэффициента k функция $f(x) = kx$ удовлетворяет уравнению (1). Покажем, что любая непрерывная функция, удовлетворяющая этому уравнению, имеет вид kx.

Обозначим $f(1)=k$. Тогда $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=k+k=2k$; $f(3)=f(2+1)=2k+k=3k$ и т. д. (индукция!). Таким образом, для любого натурального значения x мы получаем

$$f(x) = kx .$$

Теперь возьмем какое-либо натуральное число M и обозначим $f(1/M)=\mu$. Повторяя приведенные выше рассуждения, получаем $f(2/M)=2\mu$, $f(3/M)=3\mu$ и т. д.; для любого натурального числа N имеем $f(N/M)=N\mu$. В частности, при $N=M$ получаем

$$f(M/M) = M\mu = f(1) = k ,$$

так что $\mu=k/M$, и

$$f(N/M) = k(N/M).$$

Итак, мы убедились в том, что для любого рационального значения x аддитивная функция имеет вид $f(x)=kx$.

Пусть теперь x — какое угодно вещественное число, $\{x_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x. Так как $f(x)$ предполагается непрерывной,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} kx_n = k \lim_{n\to\infty} x_n = kx ,$$

чем и исчерпывается доказательство.

2. Полученный результат может быть использован и при решении некоторых других функциональных уравнений, в частности, того, которое возникло в связи с условием согласованности во времени:

$$k(T_1+T_2) = k(T_1)\,k(T_2) , \qquad (2)$$

причем неизвестная функция здесь должна принимать положительные значения.

Почленно логарифмируя функциональное уравнение (2)

$$\ln k(T_1+T_2) = \ln k(T_1) + \ln k(T_2),$$

мы убеждаемся в том, что функция $L(T)=\ln k(T)$ аддитивна:

$$L(T_1+T_2) = L(T_1)+L(T_2),$$

и в силу только что доказанного свойства аддитивных функций $L(T)=\beta T$. Итак, мы видим, что $\ln k(T)=\beta T$ и, следовательно, решением интересующего нас уравнения является

$$k(T) = e^{\beta T} .$$

Этот результат и был использован при построении функции роста.