Глава II

ОБЩИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1. Математическая формулировка общей задачи программирования

Рассматривая конкретные задачи программирования, можно заметить, что, несмотря на различия в их содержании и в областях применения, математическая формулировка этих задач может быть сходна. Следовательно, можно предположить, что существуют общие методы решения задач программирования.

Напомним, что в каждой такой задаче выступает *целевая функция* $z=f(x_1, x_2, ..., x_n)$, которую следует минимизировать или максимизировать, иными словами — оптимизировать. Это означает, что необходимо найти такие переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, от которых зависит степень достижения цели, чтобы

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min \text{ (или max)}. \qquad (2.1)$$

При этом переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ должны выполнять *побочные условия*, записываемые в виде балансовых уравнений[1]

$$\Phi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_r \quad (r = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2.2)$$

или балансовых неравенств

$$\Phi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant c_r \quad (r = 1, 2, \ldots, m), \qquad (2.2a)$$

а также *граничные условия*, обычно записываемые в следующем виде:

$$x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2.3)$$

[1] Балансовые уравнения могут быть также записаны в следующем виде: $\Phi_r(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.

Если независимые побочные условия даются в виде балансовых уравнений, то их количество не может быть больше числа переменных ($m \leqslant n$). Разность $n-m$ определяет число *степеней свободы* в данной задаче: только $n-m$ переменных может быть взято произвольно; значения остальных переменных определяются из балансовых уравнений. В частном случае, когда $m=n$, число степеней свободы равно нулю; в этом случае балансовые уравнения определяют значения всех переменных. Здесь оптимизация целевой функции не нужна, ибо существует только одна программа действий, определяющая значение z.

Вариант, в котором побочные условия даются в виде балансовых неравенств, по существу не изменяет задачи программирования. Балансовые неравенства не уменьшают числа степеней свободы задачи, они лишь ограничивают область допустимых ее решений.

Если целевая функция и балансовые уравнения (или неравенства) линейны, то есть если их можно записать в следующем виде[1]:

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \qquad (2.1.1)$$

и

$$b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 + \ldots + b_{rn}x_n = c_r \quad \text{или} \quad \leqslant c_r \; (r = 1, 2, \ldots, m), \qquad (2.2.1)$$

то эта задача относится к *линейному программированию*[2]. Если целевая функция и балансовые уравнения нелинейны, то задача относится к *нелинейному программированию*. Задачи нелинейного программирования, решаемые с помощью дифференциального исчисления, мы называем задачами *дифференциального (маргинального) программирования*[3].

И цель z, которой может быть, например, национальный доход, конечная продукция, издержки или прибыль предприятия и т. п., и переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то есть всякого рода *затраты средств*, как правило, являются неотрицательными величинами. Условие $z \geqslant 0$ является упрощающим допущением. Если бы $z<0$, то всегда можно прийти к $z \geqslant 0$ путем соответствующего изменения системы координат. Аналогично условие $x_i \geqslant 0$ ($i=1, 2, \ldots, n$) связано или с характером этих величин, или с соответствующим подбором координат.

---

[1] Целевая функция вида (2.1.1), не содержащая свободного члена, называется *линейной формой*. Устранение свободного члена из целевой функции возможно всегда путем подбора соответствующей системы координат, в которой свободный член был бы равен нулю.

[2] Линейное программирование подробнее рассматривается в главе IV.

[3] См. O. Lange, Ekonomia polityczna, T. I, wyd. 3-e, Warszawa, 1964, ss. 217—220, 237—242.

Кроме того, предполагается, что целевая функция имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка и является возрастающей функцией переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, то есть, что $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$ для $i=1, 2, ..., n$. Это также упрощающее допущение. Последнее условие означает, что в нашем анализе элиминируются средства, мешающие осуществлению программы, увеличение количества которых может понизить степень достижения цели $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} < 0\right)$, а также избыточные средства, увеличение количества которых не влияет на степень достижения цели $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\right)$[1].

Примем также, что функция $\Phi_r(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(r=1, 2, ..., m)$ в левой части балансовых уравнений (2.2) имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка.

Из балансовых уравнений следует, что затраты средств $x_1, x_2, ..., x_n$ не могут быть увеличены произвольно, ибо эти затраты обычно ограничиваются.

Балансовые уравнения и выражают ограничения затрат. Поэтому зависимости вида (2.2) мы называем также *балансовыми связями.* Они не допускают произвольного изменения количества средств; изменения могут быть только такими, чтобы условия, выражаемые балансовыми связями, выполнялись.

Задача программирования складывается из двух частей. При ее решении необходимо, во-первых, определить так называемую *область допустимых решений* и, во-вторых, необходимо найти *оптимальное решение* (или решения, если их несколько).

Областью допустимых решений называется совокупность решений, то есть значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, для которых выполняются балансовые условия (2.2) и граничные условия (2.3). Если число m балансовых уравнений меньше числа n неизвестных $(m<n)$, то, как уже сказано, задача имеет $n-m$ степеней свободы. Тогда m неизвестных можно определить через остальные $n-m$ неизвестных. Это означает, что[2]

$$x_i = \psi(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.4}$$

Из теории функций многих переменных известно, что система уравнений (2.2) имеет однозначное решение вида (2.4), если

[1] Примером средств, избыток которых может быть вреден, являются минеральные удобрения; чрезмерные затраты удобрений могут привести к снижению урожайности сельскохозяйственных культур. Пример избыточных средств — дополнительная рабочая сила, вовлекаемая в производство при недостатке сырья для расширения этого производства.

[2] Поскольку последовательность нумерации переменных произвольна, то первые m переменных $x_1, x_2, ..., x_m$ выражаются функцией остальных переменных $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$.

его якобиан (функциональный определитель) не равен нулю[1], то есть если

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2.5)$$

Совокупность определенных значений переменных x_1, $x_2, \ldots, x_n$, например $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}$, то есть совокупность величин, определяющих затраты отдельных средств, назовем *программой*. Множество программ, удовлетворяющих балансовым условиям (2.2) и граничным условиям (2.3), назовем *множеством внутренне увязанных программ.* Внутренне увязанные программы называются также *допустимыми программами.* Оптимальной программой назовем такую внутренне увязанную про-

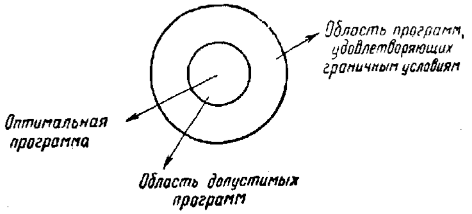

Рис. 2.1.

грамму, при которой целевая функция принимает максимальное или минимальное значение (в зависимости от характера задачи). Используя эти термины, мы можем сказать, что задача программирования заключается 1) в определении множества внутренне увязанных (допустимых) программ и 2) в выборе среди внутренне увязанных программ оптимальной программы (см. рис. 2.1).

В соответствии с делением задачи программирования на две части экономический расчет по этой задаче делится на: 1) *координационный расчет*, который обеспечивает отыскание множества внутренне увязанных программ (допустимых решений)[2], и 2) *оптимизации,* с помощью которой производится

[1] Если якобиан равен нулю, то в зависимости от ранга матрицы, для которой якобиан является определителем, увеличивается число степеней свободы задачи. Если ранг матрицы $m-k$, то существует $n-m+k$ степеней свободы.

[2] Пример координационного расчета — анализ затрат — выпуска (input-output), при котором рассматривается n валовых продуктов и n конечных продуктов, связанных n балансовыми уравнениями. Задача, как правило, имеет $2n-n=n$ степеней свободы. Основная цель анализа затрат—выпуска продукции — нахождение множества внутренне увязанных программ.

выбор оптимальной программы среди множества внутренне увязанных программ.

§ 2. Геометрическая интерпретация задачи программирования

Опишем общую задачу программирования геометрически.

Каждую программу, то есть совокупность значений x_1, $x_2, \ldots, x_n$, можно принять как некоторую точку в n-мерном евклидовом пространстве. Граничные условия $x_i \geqslant 0$ ($i=1, 2, \ldots, n$) указывают, что при определении допустимых программ рассматривается только та часть пространства, которой соответствуют неотрицательные координаты.

Как известно, из балансовых условий следует, что значения $n-m$ переменных можно принять произвольно; тогда остальные m переменных будут определяться произвольно принятыми переменными. Следовательно, внутренне увязанные программы определяются в n-мерном пространстве геометрическим $(n-m)$-мерным телом. Это тело и представляет собой область допустимых решений.

Если, например, $n=2$ (и, следовательно, имеются две переменные x_1 и x_2), а $m=1$, то областью допустимых решений является тело размерностью $2-1=1$, то есть линия той части плоскости (2-мерного пространства), которой — с учетом граничных условий — соответствуют точки с неотрицательными координатами.

Если $n=3$ и $m=2$ и, следовательно, существуют 3 переменные x_1, x_2, x_3, связанные с двумя балансовыми уравнениями $\Phi_1(x_1, x_2, x_3)=c_1$ и $\Phi_2(x_1, x_2, x_3)=c_2$, которые представляют собой некоторые плоскости в трехмерном пространстве, то область допустимых решений образуют точки, лежащие на пересечении этих плоскостей. Это некоторая линия, то есть тело размерностью $n-m=3-2=1$. Если бы в этом последнем случае были 3 независимых балансовых уравнения, то область допустимых решений имела бы размерность $3-3=0$, то есть представляла бы собой точку. В этом случае не существует проблемы выбора оптимальной программы, так как балансовые условия предписывают однозначную программу (число степеней свободы равно нулю).

Эти примеры показывают, что каждое балансовое уравнение уменьшает размерность области допустимых решений на единицу.

Рассмотрим далее, как можно геометрически описать выбор оптимальной программы среди множества внутренне увязанных программ. Допустим, что существуют 2 переменные x_1 и x_2, а также одно балансовое уравнение $\Phi_1(x_1, x_2)=C_1$. Целевая функция $z=f(x_1, x_2)$ для данного значения $z=z_0$ на рисунке представляет собой некоторую линию $z_0=f(x_1, x_2)$, лежащую в двухмерном пространстве. Придавая переменной z все бо́льшие значения $z_1<z_2<z_3...$, получим семейство линий, лежащих все дальше от начала координат (рис. 2.2). Этот последний вывод вытекает из допущения, что частные производные целевой функции положительны. Эти линии мы называем *изоцелевыми линиями*[1]. Если, следовательно, x_1 или x_2 возрастает, то увеличивается также значение функции $z=f(x_1, x_2)$.

Балансовое уравнение $\Phi_1(x_1, x_2)=c_1$ и область допустимых решений изображаются некоторой линией. Точка, соответствующая оптимальной программе, лежит на линии допустимых решений и одновременно на той изоцелевой линии, то есть линии семейства $z=f(x_1, x_2)$, которой соответствует максимальная степень достижения цели z. Это точка A на рис. 2.2.

Аналогично обстоит дело, если целевая функция z есть функция n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Придавая функции $z=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ значения $z_0<z_1<z_2<$ $<z_3...$, получаем семейство изоцелевых $(n-1)$-мерных гиперповерхностей, расположенных все дальше от начала координат. Оптимальная программа определяется точкой (или точками), которая находится в области допустимых решений, то есть принадлежит к геометрическому телу, обозначенному балансовыми условиями; в то же время эта точка лежит на изоцелевой гиперповерхности, которой соответствует наивысшая степень достижения цели.

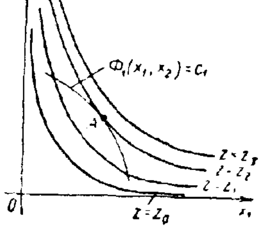

Рис. 2.2.

Такова общая логика программирования и таковы направления, по которым следует искать решения задачи программирования. Речь теперь пойдет о нахождении по возможности более простых методов, позволяющих найти точку (или точки), находящуюся в области решений и в то же время расположенную на изоцелевой гиперповерхности, наиболее удаленной от начала координат.

§ 3. Метод множителей Лагранжа. Сопряженная задача

Рассмотрим подробнее методы нахождения оптимального решения задачи программирования. С математической точки зрения речь здесь идет об определении экстремума (то есть максимума или минимума) функции многих переменных — в данном случае экстремальных значений функции (2.1) при соблюдении побочных условий (2.2) и граничных условий (2.3).

[1] В частном случае, когда z обозначает объем производства, эти линии — так называемые *изокванты*.

Пока предположим, что побочные условия имеют вид уравнений. Из математического анализа известно, что такого рода задачи решаются *методом множителей Лагранжа.*

Для этого формулируется вспомогательная функция, называемая *функцией Лагранжа*, которая имеет следующий вид:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \\ - \sum_{r=1}^{m} \lambda_r [\Phi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) - c_r]. \qquad (2.6)$$

Функция Лагранжа есть функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Первое слагаемое правой части есть функция, экстремум которой необходимо определить, а второе слагаемое есть взвешенная сумма разностей между левой и правой частями побочных условий. Весами этой суммы являются пока неопределенные множители.

Функция Лагранжа (2.6) обладает следующим свойством, имеющим практическое значение. Если точка с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ находится в области допустимых решений, то выражения, стоящие под знаком суммы в формуле (2.6), равны нулю, ибо уравнения, выражающие побочные условия, выполняются. Тогда $L=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно, в области допустимых решений функция Лагранжа имеет те же значения, что и целевая функция z. Но вне этой области $L \neq z$. Отсюда следует, что задача на определение условного экстремума функции (2.1) может быть заменена нахождением обычного экстремума функции (2.6), ибо в области допустимых решений функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно заменить функцией Лагранжа.

Решая эту вторую задачу, мы находим значения переменных $x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \ldots, x_n^{(0)}$, при которых функция Лагранжа (2.6), а в области допустимых решений и целевая функция (2.1) достигают экстремальных значений. Значения этих переменных являются функциями множителей Лагранжа:

$$x_i = g_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m). \qquad (2.7)$$

Подставляя найденные значения переменных x_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ в уравнения, выражающие побочные условия, получаем определенные значения множителей $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)}$. Эти значения не являются произвольными, ибо они определены посредством функции (2.1) и балансовых уравнений (2.2). Найдя значения множителей, подставляем их в уравнения (2.7) и получаем множество значений переменных $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, определяющих экстремальное решение (оптимальную программу). С учетом граничных условий (2.3) принимаются лишь неотрицательные значения.

Описанный метод имеет большие преимущества, ибо он не только прост, но и позволяет глубже взглянуть в самую сущность задачи программирования (как будет показано ниже).

Рассмотрим некоторую модификацию функции Лагранжа, которую можно получить, вычитая из этой функции произвольную постоянную z_0 и меняя знак этого выражения.

$$L_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \sum_{r=1}^{m} \lambda_r [\Phi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) - c_r] - [f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - z_0]. \quad (2.7)$$

Минимум функции L_1 находится в точке, в которой функция Лагранжа имеет максимум, следовательно, условие $L = \max$ эквивалентно условию $L_1 = \min$. Это последнее условие в свою очередь эквивалентно следующему условию:

$$u = \sum_{r=1}^{m} \lambda_r [\Phi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) - c_r] = \min, \quad (2.8)$$

причем выполняется побочное условие

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z_0, \quad (2.9)$$

а также, как и ранее, граничные условия $x_i \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Это объясняется тем, что функция u в области, где выполняется побочное условие (2.9), то есть при данной степени достижения цели, идентична функции L_1.

Это наводит на мысль о возможности праксеологической интерпретации функции u. Каждому множеству значений затрат средств $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при данных множителях $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ соответствует определенное число, а именно значение функции u. Иными словами, функция u как бы «измеряет» совокупные затраты средств $x_1, x_2, \ldots, x_n$, устанавливая определенную соизмеримость[1] этих средств, исчисляемых обычно в различном натуральном выражении — в человеко-часах, в тоннах, метрах, штуках и т. п. Поэтому функцию u вида (2.8) назовем *функцией затрат средств.*

Побочное условие (2.9) указывает, что степень реализации цели z имеет определенное значение или же определенный уровень z_0. Таким образом, можно сказать, что максимум функции L, а следовательно, *также и максимум целевой функции* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *при данной затрате средств, выражаемой балансовыми условиями* (2.2), *равнозначны минимуму функции затраты средств при данной степени достижения цели.*

Это два равнозначных варианта одного праксеологического принципа. Задачу на определение минимума функции затраты

---

[1] При установлении соизмеримости особую роль играют множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, о чем будет сказано далее.

средств при данной степени реализации цели мы назваем *двойственной задачей* относительно задачи на определение максимума целевой функции при данной затрате средств. Такая двойственность является характерной чертой программирования. Поэтому задачи на определение максимума целевой функции или минимума функции затраты средств мы объединяем общим названием *задач на оптимизацию*.

Метод решения двойственной задачи тот же, что и для первой задачи. Мы исходим из функции L_1, определяемой формулой (2.7), которую можно рассматривать как функцию переменных $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ и $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$. Переменную x_n можно с помощью побочного условия (2.9) определить из остальных переменных[1]. Функция L_1 достигает минимума при тех же значениях переменных, что и функция u. Эти условия позволяют найти оптимальные значения неизвестных $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_n^{(0)}$ и $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}$. Затем из условия (2.9) можно найти значение $x_n^{(0)}$.

Рассмотрим подробнее проблему минимизации функции затраты средств. При определении максимума целевой функции у нас имеется только одна цель, определяемая измеримым масштабом. Затраты же средств различны, и, для того чтобы найти значение функции затрат средств, необходимо сделать их соизмеримыми и суммировать. Из формулы (2.8) видно, что балансовые условия являются той основой, которая позволяет свести несопоставимые затраты к общему измерителю.

Однако, чтобы суммировать отдельные элементы затрат, им необходимо придать определенные «веса», которые и делают их соизмеримыми. Этими весами как раз и являются множители Лагранжа λ_i $(i=1, 2, ..., m)$. Они как бы измеряют значение (вес) отдельных балансовых зависимостей. Так множители Лагранжа приобретают праксеологический смысл.

Функция затрат средств и в области допустимых решений равна нулю, ибо для точки, находящейся в этой области, выполняются балансовые уравнения (2.2). Функция u не равна нулю только в том случае, если балансовые уравнения не выполняются. Если $\Phi_r(x_1, x_2, ..., x_n) > c_r$, то мы говорим, что *балансовый предел* c_r[2] превышен на величину разности $\Phi_r(x_1, x_2, ...$

[1] Переменная x_n находится также из переменных $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, так как $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$ для $i=1, 2, ..., n$.

[2] Легко убедиться, что величины c_r $(r=1, 2, ..., m)$ действительно играют роль балансовых пределов. Исчисляя полный дифференциал соответствующего балансового уравнения, находим, что $\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_n} dx_n = 0$. Это означает, что нельзя произвольно увеличивать затраты всех средств. Это объясняется тем, что взвешенная сумма прироста затрат отдельных средств должна быть равна нулю.

..., x_n)—c_r. Множитель λ_r придает определенный вес превышению отдельного балансового предела, а функция затрат средств и есть общая «взвешенная» мера превышений балансовых пределов.

Множители λ_r ($r=1, 2, ..., m$) всегда положительны. В этом можно удостовериться следующим образом. Если программа, находящаяся в области допустимых решений, оптимальна ($z=\max$), то функция затрат средств $u=0$ и в то же время принимает минимальное значение ($u=\min$). Отсюда следует, что в случае неоптимального расходования какого-либо средства производства всегда имеем $u>0$. Это исключает существование отрицательных значений множителей λ_r, ибо при таких значениях функция u также может стать отрицательной. Исключены также случаи, когда $\lambda_r=0$, ибо тогда функция u была бы неопределенна в области допустимых решений.

Следовательно, положительное значение функции затрат средств u может стать мерой *неоптимального расходования средств*, то есть мерой их *расточения*. Расточение происходит вследствие того, что данная степень достижения цели, определяемая условием (2.9), оказывается вне области допустимых решений, причем балансовые пределы (лимиты) превышаются. Таким образом, затраты средств не являются минимальными. Расточение оказывается тем большим, чем больше превышены балансовые пределы. Подытожим полученные результаты и дадим итоговое праксеологическое истолкование функции затрат средств u и множителей Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.

Функция u есть взвешенная сумма превышений балансовых пределов, причем соответствующие веса положительны. Она принимает значения $u=0$, если расходование средств оптимально. Функция $u>0$, если средства расходуются неоптимально, то есть если при данной степени достижения цели превышаются балансовые пределы. Значение функции u возрастает, если увеличивается расточение средств, то есть в той мере, в какой превышаются балансовые пределы.

Множители Лагранжа в функции u суть веса, соответствующие превышениям отдельных балансовых лимитов. Значения этих множителей определяются из функции Лагранжа. Множители Лагранжа можно рассматривать как «цены расчета» за каждое превышение балансовых лимитов. Это меры «болезненности» превышений балансовых лимитов и в то же время «веса» отдельных балансовых уравнений, если их рассматривать как связи, выражающие ограниченность средств.

В заключение этого параграфа необходимо сделать еще одно замечание, имеющее существенное значение. До сих пор предполагалось, что степень достижения цели выражается определенным действительным числом. Заметим, однако, что данную целевую функцию $z=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно заменить ее модификацией $g(x)=F[f(x_1, x_2, ..., x_n)]$. Эта преобразованная функция g монотонно возрастает относительно функции f, то есть увеличивается с возрастанием функции g и уменьшается с уменьшением функции f (рис. 2.3). Легко догадаться, что экстремумы функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и преобразованной функции $g(x)=F[f(x_1, x_2, ..., x_n)]$ находятся в одних и тех же точках. Это показано на рис. 2.3 для случая, когда f есть функция одной переменной.

Это означает, что задача программирования не изменится, если степень достижения цели будет выражена другими числами, лишь бы произведенное преобразование было монотонным, то есть сохранялся порядок чисел, выражающих степень достижения цели. Например, степень достижения цели, выражаемая числами 1, 3, 7, 8, может быть заменена числами 5, 6, 100, 258.

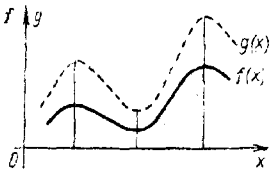

Рис. 2.3.

Следовательно, при решении задач программирования не существенно значение целевой функции. Существенно лишь, чтобы различные степени достижения цели образовывали упорядоченное множество. Такие переменные, отдельные значения состояний которых можно упорядочить, называются *величинами* в отличие от *количеств*, то есть переменных, которым можно однозначно приписать определенное значение. Все количества являются величинами, ибо множество действительных чисел упорядочено, но не все величины являются количествами. Если величина является количеством, мы говорим, что она *измерима*. Если, например, максимизируется национальный доход, выраженный в денежных единицах, или валовое производство в денежных единицах, или валовое производство стали, выраженное в тоннах, то мы имеем дело с измеримыми величинами. Но если задача состоит в максимизации величины, называемой благосостоянием общества, то цели, определяемой таким образом, измерить нельзя; не существует критерия для утверждения, что благосостояние общества возросло, например, в 2 раза или в 10 раз. Однако в определенных условиях можно упорядочить различные степени благосостояния общества. В таких случаях оказываются возможными применение общей теории программирования и нахождение оптимальных решений задачи, хотя цель не является измеримой величиной, то есть количеством.

§ 4. Обобщение для случая, когда балансовые зависимости имеют вид неравенств

Рассмотрим еще одно обобщение задачи программирования. До сих пор принималось, что балансовые зависимости даются в виде уравнений (2.2). Однако из примеров, приведенных в гл. I, следует, что балансовые зависимости часто представляются в виде неравенств, которые можно записать следующим образом[1]:

$$\Phi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant c_r \quad (r = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.10}$$

Неравенства (2.10) можно также представить в дифференциалах; эта форма эквивалентна записи вида (2.10)

$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_n} dx_n \leqslant 0 \, (r = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.10.1}$$

Отсюда следует, что приращения $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ не могут иметь произвольных значений. Значит, величины c_r, как и ранее, играют роль балансовых лимитов, которые, однако, не должны быть полностью исчерпаны. Лимит исчерпывается, если $\Phi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_r$.

На первый взгляд представляется невозможным использовать для определения экстремального значения целевой функции $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцию Лагранжа того же вида, что и ранее, то есть вида (2.6), ибо в области допустимых решений, то есть для $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых справедливы зависимости (2.10), функция Лагранжа не идентична целевой функции z[2].

Оказывается, однако, что и в этом общем случае можно использовать функцию Лагранжа, приняв следующие допущения: 1) если $\Phi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_r$, то $\lambda_r \neq 0$, причем соответствующие значения λ_r будут найдены из решения задачи на условный экстремум функции $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; 2) если же при решении задачи на экстремум окажется, что $\Phi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) < c_r$, то предполагается, что $\lambda_r = 0$.

При таких допущениях функция Лагранжа в области допустимых решений и далее остается идентичной целевой функции; следовательно, вместо определения условного экстремума целевой функции находится обычный экстремум функции Лагранжа.

Рассмотрим подробнее праксеологическую интерпретацию условного допущения о том, что в случае, когда лимит затраты данного средства не исчерпан и, следовательно, $\Phi_r(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n) < c_r$ в оптимуме, то $\lambda_r = 0$. Это означает, что элементы

---

[1] Такая запись балансового неравенства особенно удобна, ибо она означает, что «баланс» (например, фонды сырья для производства какой-то продукции) не может превысить определенного лимита c_r. Если бы из характера задачи следовало, что неравенства имеют вид $\Phi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant c_r$, то, умножив их на -1, получим неравенство вида (2.10).

[2] Вследствие того, что $\Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant c_r$, взвешенная сумма в формуле функции Лагранжа не должна быть равна нулю в области допустимых решений.

взвешенной суммы $\sum_{r=1}^{m}\lambda_r[\Phi_r(x_1, x_2, ..., x_n)-c_r]$, в которых лимит не исчерпывается в оптимальной точке, имеют веса, равные нулю, поэтому они не играют никакой роли и элиминируются. Таким образом, взвешенная сумма включает только те слагаемые, веса которых $\lambda_r>0$ и которым, следовательно, соответствует исчерпание балансовых лимитов.

Балансовые неравенства можно также свести к уравнениям, вводя *вспомогательные переменные* $x_{n+r}\geqslant 0$ $(r=1, 2, ..., m)$. Тогда неравенства (2.10) преобразуются в уравнения

$$\Phi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)+x_{n+r}=c_r \quad (r=1, 2, \ldots, m). \qquad (2.10.2)$$

Если какое-либо из условий (2.10) является уравнением, то соответствующая вспомогательная переменная $x_{n+r}=0$. Но для условий (2.10), сформулированных в виде строгого неравенства, $x_{n+r}>0$. Следовательно, вспомогательные переменные x_{n+r} определяют величину некоторого резерва. Если балансовый лимит исчерпан, то $x_{n+r}=0$, а если этот лимит не исчерпан, то $x_{n+r}>0$ обозначает величину неисчерпанного резерва.

Представив балансовые условия в виде уравнений (2.10.2), построим вновь функцию Лагранжа; теперь ее можно записать в следующем виде:

$$L=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\sum_{r=1}^{m}\lambda_r[\Phi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)-c_r]=$$

$$=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\sum_{r=1}^{m}\lambda_r x_{n+r}.$$

Такая запись функции Лагранжа позволяет еще лучше интерпретировать множители $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Их можно считать весами, приписываемыми неисчерпанным резервам средств.

Эти веса равны нулю, если резервы положительны (лимит не исчерпан), положительны, если резервы равны нулю, или отрицательны (лимит исчерпан или превышен).

Введя вспомогательные переменные x_{n+r} в балансовые зависимости, необходимо «для симметрии» ввести эти переменные и в целевую функцию. После этих преобразований модифицированную задачу программирования можно сформулировать следующим образом.

Необходимо найти значения переменных $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}$, для которых целевая функция

$$z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})=\max \text{ (или min)}, \qquad (2.11)$$

причем для этих переменных справедливы следующие балансовые условия:

$$\Phi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) + x_{n+r} = c_r \quad (r = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.12}$$

и граничные условия:

$$x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n+m). \tag{2.13}$$

Но необходимо ввести еще одно допущение. Подобно тому, как ранее $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$ для $i=1, 2, \ldots, n$, частные производные целевой функции относительно вспомогательных переменных тождественно равны нулю. Это последнее условие означает, что вспомогательные переменные не влияют на значения целевой функции.

Мы видим, что с формальной точки зрения модифицированная задача ничем не отличается от задачи, рассмотренной первоначально.

Посмотрим, влияет ли введение вспомогательных переменных на число степеней свободы программы, и если влияет, то каким образом. В предыдущей задаче, в которой балансовые

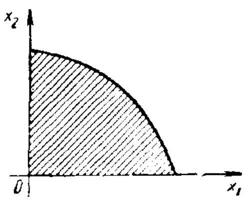

Рис. 2.4.

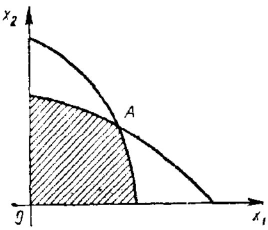

Рис. 2.5.

зависимости были даны в виде m уравнений, существовало $n-m$ степеней свободы. Здесь также имеется m балансовых уравнений (2.12), но переменных имеется $n+m$; следовательно, существует $n+m-m=n$ степеней свободы. Этот результат очевиден, если учесть, что балансовые зависимости, приводимые в виде неравенств вида (2.10), не уменьшают числа степеней свободы задачи.

Последнее можно пояснить геометрически. Допустим, что существуют две переменные x_1 и x_2 и одно балансовое уравнение. В этом случае балансовое условие определит в качестве допустимых программ координаты всех точек, которые лежат на линии, соответствующей данному балансовому уравнению. Эта линия и представляет собой область допустимых решений. Множество точек, лежащих на линии (то есть в одномерном пространстве), имеет одну степень свободы (рис. 2.4).

Если в том же примере балансовое уравнение заменяется неравенством, то областью допустимых решений становятся все точки пространства, находящегося выше или ниже линии, которая соответствует данному балансовому условию (рис. 2.4). Тогда существуют две степени свободы.

Рассмотрим далее случай, когда имеются две переменные x_1 и x_2 и два балансовых уравнения. Тогда область допустимых решений ограничивается одной точкой; это значит, что задача не имеет степеней свободы (рис. 2.5). Когда балансовые уравнения заменяются неравенствами, полем допустимых решений становится поле под обеими линиями, соответствующими балансовым условиям, а также части этих линий; следовательно, область допустимых решений имеет две степени свободы (рис. 2.5).

Эти примеры показывают, что балансовые условия, приводимые в виде неравенств, действительно не влияют на число степеней свободы задачи.