Равенство Слуцкого и смежные вопросы

Равенство Слуцкого вошло едва ли не во все учебники микроэкономики. Рассматривалось оно и в нашем журнале (лекция 16), но, как и в большинстве русскоязычных изданий, и оригинальных, и переводных, лишь в сильно упрощенном изложении. Упрощения касались нескольких моментов.

1) Рассматривался случай двух благ, допускающий простую геометрическую интерпретацию, и не рассматривались более общие случаи.

2) Изменение цены некоторого блага влечет за собой изменение объемов потребления всех благ — и того же самого, и других. Все эти изменения в соответствии с теоремой Слуцкого разлагаются на компоненты, связанные с эффектами замены (замещения) и дохода. У нас же рассматривалось лишь изменение объема потребления того самого товара, цена которого изменилась. Это оправдано тем, что целью такого построения являлся анализ поведения потребителя на определенном рынке, что позволило в конце концов объяснить кривую спроса на этом рынке. Изменение цен на иные товары объясняет не саму рассматриваемую кривую спроса, а ее сдвиги.

3) Рассматривались конечные приращения цены; при этом разложение результата на компоненты может быть выполнено неоднозначно: существуют подход Слуцкого и подход Хикса (см. [1]); последовательность замещения и изменения реального дохода может быть различной. Дифференциальное соотношение, составляющее утверждение Е. Е. Слуцкого, однозначное и не допускающее произвола в разложении, в упомянутых изданиях вообще не рассматривается.

Все это связано с тем обстоятельством, что учебники, о которых идет речь, главным образом освещают начальный курс микроэкономики; их авторы стараются уберечь читателя от возможных математических затруднений. По этой же причине равенство Слуцкого приводится без доказательства.

Следует заметить, что в статье Е. Е. Слуцкого «К теории сбалансированного бюджета потребителя» не только формулировалось и доказывалось знаменитое уравнение, но был введен ряд важных понятий и утверждений, составивших основу теории потребления. Более того, высказанные в ней идеи лежат также в основе теории предложения факторов (см., например, лекцию 35), так что можно говорить о созданной Е. Е. Слуцким теории рыночного поведения домашних хозяйств. Тот же самый подход оказался плодотворным и в теории производства, где влияние изменения цены ресурса может быть разложено на составляющие, подобные эффектам замены и дохода в потреблении.

Ниже излагаются теорема Слуцкого и связанные с ней вопросы теории потребления с полным доказательством всех утверждений. Однако изложение не воспроизводит текст самого Е. Е. Слуцкого: за время, прошедшее после выхода его работы, значительно усовершенствовались и методы микроэкономического анализа, и математическая техника анализа оптимизационных задач.

1. **Функция спроса.** Будем считать, что потребитель выбирает набор, включающий n различных благ. Для набора благ будем использовать векторное обозначение $\mathbf{X} = (x_1, x_2,..., x_n)$. Система предпочтений потребителя описывается функцией полезности $u(\mathbf{X})$, которую будем считать непрерывно дифференцируемой. Вектор $\mathbf{P} = (p_1, p_2,..., p_n)$ характеризует цены на рынках благ. Возможности выбора для потребителя ограничены величиной его дохода I. Таким образом, потребительский выбор может быть описан оптимизационной задачей

$$u(\mathbf{X}) \to \max \quad \text{при } \mathbf{PX} = I, \tag{1}$$

где использовано обозначение

$$\mathbf{PX} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i .$$

Решение этой задачи — выбираемый потребителем набор благ — зависит от цен и дохода. Эта зависимость выражается *функцией спроса*:

$$\mathbf{D}(\mathbf{P},I) = (D_1(\mathbf{P},I),\ D_2(\mathbf{P},I)\ ,...,\ D_n(\mathbf{P},I)).$$

Каждая из скалярных функций $D_i(\mathbf{P},I)$ — спрос потребителя на i-тое благо, зависящий от дохода и всех цен.

Условием равновесия потребителя является пропорциональность предельных полезностей всех благ ценам:

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda p_i . \tag{2}$$

Основной вопрос, рассматриваемый в дальнейшем, связан с реакцией потребителя на изменение одной из цен (скажем, p_j) при постоянстве всех прочих цен и дохода. При этом изменяются значения *всех* функций D_i, как из-за изменения ценовых пропорций, так и из-за изменения реального дохода потребителя.

2. **Косвенная полезность.** В рамках современной теории полезности, начало которой положено классическими работами Дж. Хикса и Р. Аллена [2, 3], уровень реального дохода связывается с максимальной степенью удовлетворения, которой может при рациональном выборе достичь потребитель при данных ценах и данной величине денежного дохода. Если полезность набора благ описывается функцией полезности $u(\mathbf{X})$, то уровень реального дохода, зависящий и от денежного дохода I, и от системы цен $\mathbf{P}$, может быть описан функцией *косвенной полезности* (indirect utility)

$$V(\mathbf{P},I) = \max\{u(\mathbf{X}) \mid \mathbf{PX} = I\},$$

или

$$V(\mathbf{P}, I) = u(\mathbf{D}\ (\mathbf{P}, I)). \tag{3}$$

Косвенная полезность сочетания денежного дохода и цен — это полезность набора **D** — решения задачи (1). В то время как функция полезности $u(\mathbf{X})$ непосредственно характеризует систему предпочтений потребителя, функция косвенной полезности $V(\mathbf{P}, I)$ связана с предпочтениями через оптимизирующий процесс потребительского выбора.

Если считать цены фиксированными, то косвенную полезность можно трактовать как полезность денежного дохода. При этом косвенная полезность измеряется в той же шкале, что и «прямая полезность» благ $u(\mathbf{X})$. С точки зрения ординалистской концепции потребительского поведения числовые значения функции $V(\mathbf{P}, I)$ не представляют интереса. Так же как и функция прямой полезности, она позволяет сопоставить комбинации цен и денежного дохода $(\mathbf{P}, I)$ и выяснить, какие из них более, а какие — менее благоприятны для данного потребителя. В частности, в терминах косвенной полезности легко определить введенные Хиксом понятия эквивалентного (ΔI_e) и компенсированного (ΔI_c) приращений дохода, соответствующих изменению цен $\Delta\mathbf{P}$:

$$V(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}, I) = V(\mathbf{P}, I + \Delta I_e), \qquad V(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}, I + \Delta I_c) = V(\Delta, I).$$

Влияние изменения дохода и цен на уровень удовлетворения потребителя можно определить, почленно дифференцируя равенство (3):

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial D_i}{\partial I}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial D_i}{\partial p_i}. \tag{5}$$

Отметим, что равенство, выражающее бюджетное ограничение:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i D_i = I, \tag{6}$$

выполняется при любых I и **P**, так что его можно дифференцировать:

$$\frac{\partial}{\partial I} \sum_{i=1}^{n} p_i D_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial D_i}{\partial I} = 1, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_j} \sum_{i=1}^{n} p_i D_j = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial D_i}{\partial p_j} + D_j = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial D_i}{\partial p_j} = -D_j. \tag{8}$$

Сравнивая равенства (2) и (7) с учетом условия (1), находим, что

$$\lambda = \frac{\partial V}{\partial I}. \tag{9}$$

Почленно перемножая равенства (8) и (9) и сравнивая с (5), получаем

$$\frac{\partial V}{\partial p_j} = -D_j \frac{\partial V}{\partial I}. \tag{10}$$

Равенство (10) имеет достаточно прозрачную экономическую интерпретацию и на первый взгляд представляется тривиальным. Если объем потребления j-того блага составляет D_j, а его цена возросла на $\Delta p_j > 0$, то расходы на его приобретение возрастают, казалось бы, на величину $\Delta p_j\, D_j$; увеличение дохода на эту величину скомпенсировало бы ущерб от роста цены, так что $\Delta i_c = \Delta p_j D_j$.

Именно такой точки зрения придерживался Е. Е. Слуцкий. Дж. Хикс обратил внимание на следующее. При изменении цены j-того блага изменилось соотношение цен, и хотя добавка к исходному доходу величины $\Delta p_j\, D_j$ позволит потребителю приобрести исходный набор благ, но в новой ситуации такой выбор, вообще говоря, не оптимален, т. е. потребитель окажется в состоянии приобрести и более предпочтительный набор. Можно утверждать лишь, что $\Delta I_c \leq \Delta p_j\, D_j$. В этом и проявилось различие в подходах Хикса и Слуцкого к понятию компенсации изменения цены.

Итак, если, следуя Хиксу, понимать под компенсацией восстановление исходного *уровня благосостояния,* то произведение $\Delta p_j\; D_j$ дает завышенную оценку ΔI_c; оптимальный выбор потребителя в каждой ситуации «цены—доход» и происходящие при этом процессы замещения одних благ другими приводят к нарушению равенства $\Delta I_c = \Delta p_j\, D_j$ для конечных приращений.

Но оно, как следует из равенства (10), верно в пределе при $\Delta p_j \to 0$. Действительно,

$$\left.\frac{dI}{dp_j}\right|_{V=\mathrm{const}} = D_j,$$

так что в дифференциальной форме $dI_c = D_j dp_j$. Аналогичные соображения показывают, что $dI_e = -D_j dp_j$.

3. **Функция замещения.** Под замещением, или заменой, подразумевается такое изменение объемов потребления различных благ, при котором полезность потребляемого набора не изменяется. При изменении цен точка потребительского выбора, вообще говоря, перемещается с одной поверхности (кривой) безразличия на другую, т. е. полезность потребляемого набора изменяется. Применительно к изменению по-

требительского выбора при изменении цен замещение выступает только как средство теоретического анализа; оно является лишь компонентой изменения выбора и может рассматриваться как результат изменения цен с одновременным компенсирующим изменением дохода.

Для формального описания замещения рассмотрим оптимизационную задачу, сопряженную по отношению к задаче (1): нахождение набора благ, имеющего наименьшую стоимость и доставляющую потребителю заданный уровень полезности U:

$$\mathbf{PX} \to \min \quad \text{при} \quad u(\mathbf{X}) = U. \tag{11}$$

Решение этой задачи — набор благ, рассматриваемый в зависимости от системы цен $\mathbf{P}$ и от заданного уровня полезности U, — будем называть *функцией замещения*[5]:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{P}, U) = (Q_1(\mathbf{P}, U), \quad Q_2(\mathbf{P}, U), \ldots, Q_n(\mathbf{P}, U)).$$

Изменение любой из цен (p_j) приводит к изменению всех Q_i; степень этой изменчивости получила название эффекта замены. В дифференциальной форме эффект замены выражается величиной $\partial Q_i \,/\, \partial p_j$.

4. **Равенство Слуцкого.** Пусть потребитель, имеющий доход I, при ценах $\mathbf{P}$ выбрал набор $\mathbf{D}(\mathbf{P}, I)$ и получил полезность $U = V(\mathbf{P}, I)$. Ясно, что он не мог бы достичь той же полезности меньшими затратами, так что набор $\mathbf{D}(\mathbf{P}, I)$ есть в то же время решение задачи замещения при данных ценах и уровне удовлетворения. Поэтому имеет место тождество

$$\mathbf{D}(\mathbf{P}, I) = \mathbf{Q}(\mathbf{P}, V(\mathbf{P}, I)). \tag{12}$$

Дифференцируя почленно тождество (12) по цене j-того блага, получим

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j} = \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} + \frac{\partial Q_i}{\partial U} \cdot \frac{\partial V}{\partial p_j},$$

или, с учетом равенства (10),

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j} = \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial U} \cdot \frac{\partial V}{\partial I} \cdot D_j. \tag{13}$$

С другой стороны, дифференцируя (12) по I, получим

$$\frac{\partial D_i}{\partial I} = \frac{\partial Q_i}{\partial U} \cdot \frac{\partial V}{\partial I}.$$

---

[5] Эта функция не имеет общепринятого названия. Слуцкий называл ее «остаточным изменением»; в некоторых современных изданиях ее называют функцией спроса с постоянной полезностью (constant utility demand function).

Сопоставляя этот результат с равенством (13), получим утверждение теоремы Слуцкого:

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j} = \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} - \frac{\partial D_i}{\partial I} \cdot D_j.$$

Первое слагаемое в правой части интерпретируется как *эффект замены*, второе (вместе со знаком «минус») — как *эффект дохода*.

Заметим, что вектор **X** потребительского выбора можно рассматривать и как значение функции спроса, и как значение функции замещения:

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}(\mathbf{P}, I) = \mathbf{Q}(\mathbf{P}, U),$$

где

$$I = \mathbf{PX}, \qquad U = u(\mathbf{X}).$$

Поэтому в тех случаях, когда мы будем оперировать *величинами* объемов спроса на различные блага, а не их *зависимостями* от тех или иных переменных, нам будет безразлично, считать ли их значениями функции **D** или **Q**; мы будем их обозначать x_i. В этих обозначениях равенство Слуцкого имеет вид

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j} = \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} - \frac{\partial D_i}{\partial I} \cdot x_j. \tag{14}$$

В частности, при $i = j$ равенство (14) описывает изменение спроса на некоторое благо при изменении его собственной цены:

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} - \frac{\partial D_i}{\partial I} \cdot x_i.$$

Вследствие убывающей нормы замены собственный эффект замены всегда отрицателен; эффект дохода может быть как отрицательным (для нормальных благ), так и положительным (для низших благ).

Равенство Слуцкого может быть записано также как соотношение между эластичностями спроса. Умножим обе части равенства (14) на p_j / x_i:

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i} - \frac{\partial D_i}{\partial I} \cdot \frac{I}{x_i} \cdot \frac{p_j x_j}{I}.$$

Выражение в левой части представляет собой эластичность спроса на i-тое благо по цене j-того (прямую — при $i = j$, перекрестную — при $i \neq j$):

$$e_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i}.$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой эластичность *компенсированного* спроса (при фиксированной полезности) на i-тое благо по цене j-того:

$$\tilde{e}_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i}.$$

Выражение

$$E_i = \frac{\partial D_i}{\partial I} \cdot \frac{I}{x_i}$$

представляет собой эластичность спроса по доходу, а отношение $w_j = p_j x_j / I$ — долю j-того блага в расходах. Используя эти обозначения, выразим равенство Слуцкого в терминах эластичностей спроса:

$$e_{ij} = \tilde{e}_{ij} - w_j E_i. \tag{15}$$

5. **Перекрестный эффект замены.** С задачей (1) оптимального потребительского выбора, ограниченного величиной дохода, связана функция $V(\mathbf{P}, I)$, характеризующая полезность дохода I при заданных ценах. Подобно этому, с задачей (11) связана функция

$$y(\mathbf{P}, U) = \min \{ \mathbf{PX} \mid u(\mathbf{X}) = U \},$$

или

$$y(\mathbf{P}, U) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{P}, U). \tag{16}$$

Функция $y(\mathbf{P}, U)$ характеризует расходы потребителя, минимально необходимые для достижения уровня благосостояния U при заданных ценах. Будем называть ее *функцией расходов*.

Равенство (16) выполняется функционально, так что его можно почленно дифференцировать по p_j:

$$\frac{\partial y}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} + Q_j. \tag{17}$$

Так как задача (11) является сопряженной по отношению к задаче (1), ее решение также удовлетворяет условию (2): цены благ пропорциональны их предельным полезностям. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}.$$

Заметим, что сумма в правой части представляет собой полную производную полезности dU/dp_j при замещении; но при замещении по определению $U = \text{const}$, так что $dU/dp_j = 0$. Итак, сумма в правой части выражения (17) равна нулю, так что

$$\frac{\partial y}{\partial p_j} = Q_j.$$

Продифференцируем полученное равенство по цене i-того блага:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}.$$

Но

$$\frac{\partial^2 y}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 y}{\partial p_j \partial p_i},$$

так что

$$\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}. \tag{18}$$

Итак, перекрестные эффекты замещения объема i-того блага по цене j-того и объема j-того блага по цене i-того равны друг другу.

Это обстоятельство существенно для классификации взаимозависимостей благ в потреблении. Если блага являются взаимными заменителями, то перекрестный эффект замены положителен. При этом безразлично, идет ли речь об эффекте замены объема i-того блага по цене j-того, или, наоборот, они равны друг другу. То же относится и к взаимодополняющим благам — там обе характеристики отрицательны. Таким образом, перекрестные эффекты замещения являются в полном смысле характеристиками *взаимной* зависимости благ.

Рассмотрим, как соотносятся соответствующие эластичности спроса. Из определения эластичности компенсированного спроса следует

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = \tilde{e}_{ij} \cdot \frac{x_j}{p_i}.$$

Равенство (18) позволяет утверждать, что

$$\tilde{e}_{ij} \cdot \frac{x_i}{p_j} = \tilde{e}_{ij} \cdot \frac{x_j}{p_i},$$

или

$$\tilde{e}_{ij} \cdot \frac{1}{p_j x_j} = \tilde{e}_{ji} \cdot \frac{1}{p_i x_i}.$$

Умножая обе части на I, получим

$$\frac{\tilde{e}_{ij}}{w_j} = \frac{\tilde{e}_{ji}}{w_i}. \tag{19}$$

Поскольку перекрестные эластичности компенсированного спроса отличаются от соответствующих эффектов замены положительными множителями, величины $\tilde{e}_{ij}$ и $\tilde{e}_{ji}$ также совпадают по знаку.

Чтобы установить связь между «обычными» перекрестными эластичностями спроса (при фиксированном доходе), преобразуем равенство (15):

$$\frac{\tilde{e}_{ij}}{w_j} = \frac{e_{ij}}{w_j} + E_i .$$

Из равенства (19) теперь следует результат:

$$\frac{e_{ij}}{w_j} + E_i = \frac{e_{ji}}{w_i} + E_j.$$

Таким образом, из равенства Слуцкого вытекает взаимная сопряженность перекрестных эластичностей спроса на два блага по ценам друг друга и их эластичностей по доходу. Влияние дополнительных слагаемых — эластичностей по доходу — приводит к тому, что величины e_{ij} и e_{ji} могут различаться не только абсолютной величиной, но и знаком. В таких случаях оценка характера взаимозависимости благ оказывается противоречивой. Эластичности вида $\tilde{e}_{ij}$, «очищенные» от влияния эффекта дохода, часто называют *нетто-эластичностями* (или эластичностями по Хиксу), эластичности вида e_{ji} — *брутто-эластичностями.* Непротиворечиво оценивают характер взаимосвязи благ нетто-эластичности.

Литература

1. *Гальперин В.М, Игнатьев С.М., Моргунов В.И.* Микроэкономика : В 2-х т. СПб.: Экономическая школа, 1994. Т. 1.
2. *Hicks J.R., Allen R.G.D.* A reconsideration of the theory of value // Economica. 1934. N 1. P. 52–76. — Рус. пер.: *Хикс Дж.Р., Аллен Р.Г.Д.* Пересмотр теории ценности // Теория потребительского поведения и спроса. СПб.: Экономическая школа, 1993. С. 117–141. (Вехи экономической мысли; Вып. 1).
3. *Hicks J.R.* Value and capital. Oxford, 1939. — Рус. пер.: *Хикс Дж.Р.* Стоимость и капитал. М., 1988.

П. А. Ватник