сты такой задачи и не ставят. При анализе общего равновесия экономистов интересуют только основные свойства или условия этого равновесия.

В частности, экономисты могут исследовать принципиальную *возможность* общего равновесия. Вдруг функциональные зависимости, связывающие разные рынки, таковы, что общее равновесие в принципе невозможно (равновесие на одних рынках несовместимо с равновесиями на других)?

Или же пытаться определить *единственность* общего равновесия. Если общее равновесие возможно, то будет ли существовать только одно состояние общего равновесия или их может быть несколько (в частности, сколь угодно много)?

Или же ответить на вопрос о *механизме достижения* этого равновесия. Если на пути к общему равновесию выявятся какие-либо препятствия, то хозяйство будет находиться в неравновесии при излишках и дефицитах на отдельных рынках. Эта проблема имеет такое серьезное значение, что в XX в. из необходимости ее разработки выросла целая ветвь экономической науки — *макроэкономика.*

Или, наконец, поставить вопрос о *справедливости* того или иного общего равновесия в хозяйстве. Состояние общего равновесия характеризуется определенным распределением доходов между людьми, которое зависит от количества ресурсов в хозяйстве и их распределения между его членами. Соответственно в ситуации равновесия могут существовать богатые и бедные, счастливые и несчастные. Для сравнения разных общих равновесий хозяйства с точки зрения их благополучия тоже выросла целая теория, которая называется *теорией благосостояния.*

Обо всех этих проблемах и пойдет речь в дальнейших лекциях нашего журнала. Но сначала...

РАЗДЕЛ 2

Модель Вальраса

Первым, кто взялся за построение модели общего равновесия, был французский экономист Леон Вальрас.

Модель является попыткой представить все уравнения, описывающие общее равновесие в хозяйстве, чтобы сравнить число этих уравнений с числом переменных, которые они включают. Если число уравнений будет равно числу переменных, то общее равновесие возможно.

Итак, вообразим себе хозяйство, обладающее следующими характеристиками. На любом рынке этого хозяйства существует совершенная конкуренция (большое количество покупателей и продавцов, полная информированность, отсутствие затрат на вход и выход с рынка, каждый потребитель и фирма действуют независимо от остальных). Предполагается также отсутствие внешних эффектов и общественных благ.

Определение числа неизвестных

В хозяйстве существует m видов потребительских благ, каждое из которых производится в условиях совершенной конкуренции множеством независимых фирм. Каждая фирма максимизирует свою прибыль.

В хозяйстве имеется n видов ресурсов, которые находятся в собственности потребителей и предоставляются последними фирмам по некоторым ценам. Каждый потребитель может владеть любым числом видов ресурсов и не обязательно предлагает к продаже все количество имеющегося ресурса. Полученный доход потребители распределяют между разными потребительскими благами, максимизируя свои функции полезности.

Как и Вальрас в первых вариантах своей модели, мы предположим, что для производства единицы каждого блага необходимо фиксированное количество каждого ресурса. Таким образом, существует матрица размером n на m, отдельный элемент которой, a_{ij}, показывает количество ресурса j, необходимое для производства блага i:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Здесь нам следует сразу заметить две вещи. Во-первых, из первичных ресурсов сразу производятся потребительские блага (нет промежуточных благ и их рынков). Во-вторых, поскольку у фирм отсутствуют постоянные затраты, в этой системе не существует деления на короткий и длительный периоды. Существует единое общее равновесие, которое по смыслу соответствует равновесию длительного периода.

Таким образом, всего в хозяйстве существует n рынков ресурсов и m рынков потребительских благ. На каждом рынке существуют две переменные — цена и количество. На рынке отдельного блага это P_i и Q_i, а на рынке отдельного ресурса — p_j и q_j (пользуясь принятыми в вып. 4 обозначениями, используем прописные буквы для переменных на рынках благ и строчные — для рынков ресурсов). Всего у нас получается $2n + 2m$ неизвестных.

Определение числа уравнений

Определим теперь число уравнений, описывающих хозяйственную систему. Существуют четыре группы уравнений, описывающих различные типы функциональных зависимостей в хозяйстве: 1) уравнения для спроса на потребительские блага, 2) уравнения для предложения ресурсов, 3) уравнения для равновесия в отрасли, 4) уравнения для спроса на ресурсы. Первые две группы описывают равновесие потребителей, вторые две задают равновесие производителей.

1. **Уравнения потребительского спроса**. Спрос отдельного потребителя на каждое благо определяется как функция цен всех потребительских благ ($P_1 \dots P_m$) и цен всех ресурсов ($p_1 \dots p_n$). Заметим сразу, что этим подчеркиваются два типа общих взаимосвязей в хозяйстве — зависимость спроса на отдельное благо от цен других благ и от цен ресурсов (которые задают возможность «заработать», отдавая свои ресурсы напрокат). Наличием этих зависимостей и отличается такая функция индивидуального спроса на благо от тех функций индивидуального спроса, которые мы использовали в предыдущих лекциях.

Так как спрос каждого потребителя зависит от этих переменных, можно сказать, что рыночный спрос определяется как сумма индивидуальных спросов. Поэтому, чтобы записать функцию рыночного спроса на благо, мы должны просто «слить» все функции индивидуального спроса в одну функцию и записать следующее равенство:

$$Q_i = f(P_1 \dots P_m;\ \ p_1 \dots p_n), \qquad (1)$$

где Q_i — объем производства блага; $f(P_1 \dots P_m; p_1 \dots p_n)$ —

суммарный спрос всех потребителей на рынке блага i. Поскольку у нас m рынков благ, мы имеем ровно m таких уравнений спроса.

2. **Уравнения предложения ресурсов.** Поскольку потребители должны также выбрать объем предложения ресурсов, которыми они обладают, мы должны записать их функции предложения. Индивидуальное предложение ресурса также зависит от цен потребительских благ $(P_1 \dots P_m)$ и цен всех ресурсов $(p_1 \dots p_n)$ — именно два ряда этих значений позволяют оценить выгоды от продажи ресурсов. Поскольку индивидуальное предложение каждого потребителя определяется аналогично, можем представить функцию рыночного предложения отдельного ресурса как функцию от всех цен в хозяйстве и записать следующее равенство:

$$q_j = \varphi\left(P_1 \dots P_m; p_1 \dots p_n\right), \qquad (2)$$

где q_j — объем продаж на рынке ресурса j; $\varphi(P_1 \dots P_m; p_1 \dots p_n)$ — функция предложения ресурса j всеми потребителями хозяйства. Поскольку в хозяйстве существует n рынков ресурсов, имеем ровно n таких функций предложения.

См. ЭШ. Вып. 4, Математическое приложение: Потребительский выбор и предложение труда

Заметим, что один вектор цен $(P_1 \dots P_m; p_1 \dots p_n)$ задает объемы спроса и предложения сразу на всех рынках благ и ресурсов, так как выбор отдельного потребителя заключается в *одновременном* определении своего спроса и предложения на всех рынках хозяйства при заданных ценах. С подобной постановкой задачи мы уже сталкивались, когда рассматривали одновременный выбор индивидом предложения своего труда и спроса на блага.

Кроме того, в этом векторе цен важно именно *соотношение* цен различных благ и ресурсов, а не их абсолютная величина. Пропорциональное изменение всех цен не вызовет изменения спроса и предложения на всех рынках. Например, если и цены благ, и цены ресурсов повысятся ровно в 2 раза, ни у одного потребителя не будет стимула для изменения своего поведения.

3. **Уравнения равновесия в отрасли.** Согласно использованной выше логике, теперь мы должны были бы записать функции предложения на рынке каждого блага на основе функции предложения отдельной фирмы. Но... мы не можем так поступить в силу предположения о фиксированных коэффициентах. Ведь фик-

сированные коэффициенты означают отсутствие экономии от масштаба и отсутствие убывающей предельной производительности. Функция предложения любого блага в этой ситуации должна иметь бесконечную эластичность, а размер фирмы оказывается неопределен.

Но в этой ситуации мы можем проигнорировать функции предложения как таковые и записать другое условие равновесия отдельного производителя на отдельном рынке — равенство прибыли нулю. Поскольку на всех рынках существует совершенная конкуренция, общее равновесие будет достигнуто в том случае, если прибыльность производства всех благ будет одинакова и равна нулю. Или, что то же самое, средние затраты будут равны цене блага. Таким образом, имеем

$$P_i = p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \ldots + p_n a_{in}, \qquad (3)$$

т. е. цена блага i распадается на затраты по приобретению ресурсов для производства единицы блага. Поскольку каждое благо должно производиться при аналогичных условиях, мы имеем m таких уравнений. Здесь также существенно лишь соотношение цен: их пропорциональное изменение не нарушает равенства (3).

4. **Уравнения спроса на ресурсы.** При определении спроса на ресурсы мы сталкиваемся с той же проблемой, что в предыдущем пункте. Поскольку производственные коэффициенты постоянны, функции спроса на ресурсы будут иметь бесконечную эластичность. Но, как и в предыдущем случае, мы можем схитрить и записать условие общего равновесия — спрос на каждый ресурс будет предъявляться в таком количестве, которое необходимо для производства равновесного набора благ согласно существующим производственным коэффициентам. Формально это тоже функция спроса на ресурс, в которой в качестве аргументов записаны не цены благ и ресурсов, а уже выбранные количества производимых благ. Поэтому мы можем записать

$$q_j = a_{1j} Q_1 + a_{2j} Q_2 + \ldots + a_{mj} Q_m, \qquad (4)$$

где Q_i — объем производства блага i. Поскольку это равенство должно выполняться для всех ресурсов, мы имеем еще n таких уравнений.

Поскольку в данном случае мы анализируем относительные цены и абстрагируемся от их абсолютных значений, для измерения цен нам необходимо выбрать одно благо, которое будет служить счетной единицей (*фр.* numeraire — счетный). Цена этого блага принимается равной единице и поэтому не является неизвестной. Таким образом, число неизвестных равно $2n + 2m - 1$.

Теперь мы можем подвести итог. Всего в нашей системе имеется $2n + 2m$ уравнений и $2n + 2m - 1$ неизвестных. Как видно, неизвестных меньше, чем уравнений, и это говорит о том, что одно из уравнений оказывается лишним. Если нам удастся исключить его из системы, доказав его зависимость от остальных, тогда общее равновесие оказывается возможным.

Исключить одно уравнение действительно можно на основе следующего соображения. В условиях общего равновесия весь доход, полученный потребителями от продажи ресурсов, расходуется на рынках потребительских благ. Это значит, что общая стоимость ресурсов должна быть равна общей стоимости благ. Поэтому в условиях общего равновесия, зная цены и количества на всех рынках ресурсов и благ, кроме рынка блага, выбранного в качестве счетной единицы, мы можем рассчитать объем спроса на этом рынке остаточным способом. Поэтому одно из уравнений спроса оказывается зависимым от всех остальных уравнений в системе, и его можно исключить. Остается $2n + 2m - 1$ независимых уравнений.

Таким образом, число уравнений оказывается равным числу неизвестных, и это означает возможность достижения общего равновесия в хозяйстве.

Проблемы, связанные с моделью общего равновесия

Точно так же можно усложнять модель и далее, подсчитывая уравнения и неизвестные, но очевидно, что это не прибавит какого-то нового результата, который получен с помощью простой модели. Гораздо важнее и интереснее рассмотреть другие проблемы, которые будут касаться любой модели (и сложной, и простой) общего равновесия.

1. **Достаточность.** *Необходимость* равенства числа неизвестных числу уравнений для достижения общего равновесия в хозяйстве не означает *достаточность* этого условия. Во-первых, если функции нелинейны, то у системы уравнений возможно несколько реше-

ний. Это означает существование нескольких точек равновесия (кривые спроса и предложения на отдельных рынках могут пересекаться более чем один раз). Во-вторых, в результате решения этой системы уравнений мы можем получить отрицательные цены и количества для отдельных благ, которые не будут иметь экономического смысла, и общее равновесие при таких абсурдных ценах и количествах будет невозможным.

Первое строгое доказательство существования общего равновесия осуществил в 1930-х гг. немецкий математик и статистик А. Вальд (1902–1950).[1] Впоследствии это доказательство усовершенствовали в 1950-х гг. К. Эрроу и Ж. Дебре.[2] В результате было показано, что существует единственное состояние общего равновесия с неотрицательными ценами и количествами, если выполняются два условия: 1) существует постоянная или убывающая отдача от масштаба; 2) для любого блага существует одно или несколько других благ, находящееся с ним в отношении замещения.

2. **Механизм достижения**. Для доказательства достижения возможности общего равновесия необходимо определить механизм достижения равновесных цен и объемов на каждом рынке. Сам Вальрас использовал для доказательства достижения равновесия *теорию нащупывания* (*фр.* tatonnement), которая заключается в следующем.

Сначала необходимо ответить на вопрос, будет ли система двигаться в сторону равновесных цен и объемов. Это доказывается «от противного»: если представить себе, что вначале реализуется некоторый произвольный вектор цен, который не соответствует равновесному, это будет означать излишек на одних рынках и дефицит на других. Это состояние приведет к росту цен на тех рынках, где имеется дефицит, и снижению цен на тех рынках, где наблюдается излишек. Изменение цен будет продолжаться до тех пор, пока не будет «нащупан» равновесный вектор цен.

---

[1] *Wald A.* 1) Über die eindeutige positive Losbarkeit der neuen Produktionsgleischungen // Ergebnisse eines mathematischen Koll. 1935. H. 6. S. 12–20; 2) Über die Produktionsgleischungen der Ökonomischen Wertlehre // Ibid. 1936. H. 7. S. 1–6.

[2] *Arrow K., Debreu J.* Existence of an equilibrium for a competitive economy // Econometrica. 1954. Vol. 22. P. 82–109.