Математическое приложение

Потребительский выбор и предложение труда

Напомним читателю основную задачу потребительского выбора, которую мы рассматривали в «ЭШ», вып. 2. Потребитель выбирает набор $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ из n различных благ. Каждое (i-тое) благо характеризуется ценой p_i, причем все цены положительны (не равны нулю). Потребитель, имеющий функцию полезности $U(q)$ и обладающий доходом I, решает задачу

$$U(q) \to \max$$

при выполнении бюджетного ограничения

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i = I. \tag{1}$$

Здесь мы рассмотрим модель, описывающую поведение индивида, решающего совместно задачу потребительского выбора и объема предложения труда. Для этого в набор $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ потребляемых индивидом благ наряду с теми благами, которые покупаются на рынке, включим такие, как сон, прогулки и т. п., не требующие денежных затрат, но требующие затрат времени. Каждое благо теперь характеризуется ценой p_i и затратами времени t_i на потребление единицы блага. Некоторые из цен теперь могут равняться нулю, как и некоторые из удельных затрат времени; но ни для какого из благ p_i и t_i не могут равняться нулю одновременно.

Теперь мы будем считать доход не заданным, а зависящим от объема предложения индивидом труда L. Обозначим F долю времени (скажем, число часов в сутки), отводимую на потребление. Будем считать, что различные блага не могут потребляться в одно и то же время и поэтому величина F складывается из затрат времени на потребление различных благ:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i = F. \tag{2}$$

Общая продолжительность суток T (24 ч) разлагается на время труда и время потребления: $T = L + F$, а суточный доход определяется временем труда L и часовой ставкой заработной платы w: $I = wL$. Отсюда

$$I + wF = wT.$$

Используя равенства (1) и (2), получаем ограничение, которому должно удовлетворять решение комплексной задачи потребителя:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i + \sum_{i=1}^{n} w t_i q_i = wT,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i + w t_i) q_i = I. \qquad (3)$$

Равенство (3) назовем *обобщенным бюджетным ограничением*, а множитель в скобках под знаком суммы — *обобщенной ценой* ($g_i = p_i + w t_i$). Ее первая компонента (p_i) — цена в обычном смысле, вторая ($w t_i$) — альтернативные затраты, связанные с тем, что потребление единицы i-того блага сопряжено с затратами времени t_i и тем самым — с отказом от заработной платы в количестве $w t_i$.

Таким образом, задача потребительского выбора имеет вид

$$U(q) \to \max$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^{n} g_i q_i = wT.$$

Если решение этой задачи — набор q — подставить в уравнение (2), получим величину времени, отводимого на потребление; остальная часть суток — объем предложения труда.

Заметим, что параметрами задачи являются цены, ставка заработной платы и удельные затраты времени. От этих параметров зависят решение задачи и, следовательно, объем предложения труда.

Уместно сопоставить только что рассмотренную задачу с задачей, описанной в Математическом приложении «Задача Лагранжа» («ЭШ», вып. 2, с. 269–270). Там ограничения вида (1) — по денежному бюджету — и вида (2) — по бюджету времени — рассматривались как независимые, а величины денежного дохода I и времени на потребление F были заданными. Это соответствует случаю, когда потребитель выбирает только объемы потребления различных благ, но не выбирает продолжительность рабочего дня. Двум ограничениям соответствуют два множителя Лагранжа: λ — для «денежного» ограничения и μ — для «временного». Величина λ характеризует дополнительную полезность дополнительного рубля, величина μ — дополнительной минуты:

$$\lambda = \frac{\partial U}{\partial I}; \qquad \mu = \frac{\partial U}{\partial F}.$$

В рамках ординалистской концепции полезности числовые значения λ и μ не имеют смысла. Внимание читателя обращалось на отношение μ/λ, имеющее размерность ставки заработной платы, и предлагалось подумать над экономическим смыслом этого отношения.

Теперь заметим, что $\mu/\lambda = MRS_{FI}$ — предельная норма замещения досуга денежным доходом. Если отношение не совпадает с рыночной ставкой заработной платы, индивид не находится в равновесии на рынке труда: при $\mu/\lambda > w$ дополнительная единица досуга ценится потребителем выше, чем соответствующее приращение дохода, и индивид хотел бы работать меньше, чем ему приходится (и соответственно меньше зарабатывать); при $\mu/\lambda > w$ он хотел бы зарабатывать больше.

Пример. Пусть потребление индивида ограничивается тремя благами: 1) пищей, 2) сном, 3) книгами. Его предпочтения описываются функцией полезности

$$U(q) = q_1^{0.2} q_2^{0.3} q_3^{0.5}.$$

Ставку заработной платы примем равной 5. Цены и удельные затраты времени на потребление приведены в таблице. В последнем столбце приведены значения обобщенной цены при $w = 5$.

i	Благо	p_i	t_i	$\underline{g}_i$
1	Пища	10	—	10
2	Сон	—	1	5
3	Книги	15	5	40

Для удобства вычислений заменим функцию полезности эквивалентной функцией: $\ln U(q) = 0.2\ln q_1 + 0.3\ln q_2 + 0.5\ln q_3$. Функция Лагранжа:

$$L(q, \lambda) = 0.2\ln q_1 + 0.3\ln q_2 + 0.5\ln q_3 - \lambda(10q_1 + 5q_2 + 40q_3).$$

Условия оптимальности:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{0.2}{q_1} - 10\lambda = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{0.3}{q_2} - 5\lambda = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial q_3} = \frac{0.5}{q_3} - 40\lambda = 0.$$

Отсюда

$$q_1 = \frac{0.2}{10\lambda}; \quad q_2 = \frac{0.3}{5\lambda}; \quad q_3 = \frac{0.5}{40\lambda}.$$

Из условия $10q_1 + 5q_2 + 40q_3 = 5 \cdot 24$ находим $\lambda = 1/120$, так что

$$q_1 = 2.4; \quad q_2 = 7.2; \quad q_3 = 1.5.$$

Затраты времени на потребление: $F = 0 \cdot 2.4 + 1 \cdot 7.2 + 5 \cdot 1.5 = 14.7$, и объем предложения труда 9.3 ч/сут.

Если цена книг возрастет с 15 до 25 единиц, то q_1 и q_2 останутся без изменения, q_3 примет новое значение: $q_3 = 1.2$; $F = 0 \cdot 2.4 + 1 \cdot 7.2 + 5 \cdot 1.2 = 13.2$, так что теперь объем предложения труда $L = 24 - 13.2 = 10.8$.

Разные схемы обслуживания долга

Многие финансовые операции в конечном счете сводятся к тому, что одна сторона (фирма, домашнее хозяйство) дает другой стороне деньги взаймы, а та через обусловленное время возвращает взятую сумму с процентами. И у кредитора, и у заемщика могут быть определенные соображения по поводу того, когда и в каких количествах следует возвращать взятую взаймы сумму и проценты, так что стороны договариваются не только об общей сумме, но и о временно́й схеме платежей, или, как принято говорить, схеме *обслуживания* долга. От схемы обслуживания долга, а не только от взятой взаймы суммы (основного долга), общего срока займа и процентной ставки зависит возвращаемая сумма.

Рассмотрим вначале числовые примеры.

Допустим, вы взяли взаймы 4000 р. сроком на 2 года под 25% годовых. Погашение одним платежом в конце срока. Какую сумму вы должны вернуть кредитору?

Если вы знакомы с лекцией 18, ответ для вас очевиден:

$$4000(1 + 0.25)^2 = 6250 \text{ р.}$$

При желании этот результат можно разложить следующим образом:

4000 р. — возврат долга;

1000 р. — проценты за 1-й год;

250 р. — проценты на проценты 1-го года;

1000 р. — проценты за 2-й год.

Но вы могли договориться с кредитором иначе. Например, выплачивать проценты в конце каждого года. В конце 1-го года вам нужно будет заплатить 1000 р. Это равносильно тому, что в конце 1-го года вы вернули долг с процентами и сразу же взяли взаймы снова 4000 р. на 1 год, так что к концу 2-го года вам останется вернуть 4000 р. долга и 1000 р. процентов. В этом случае кредитор получит с вас в качестве процентов всего 2000 р.: 1000 — в конце 1-го года и 1000 — в конце 2-го года.

Но возможны и другие схемы. Можно, скажем, заплатить проценты сразу, чтобы через два года вернуть 4000 р. и тем самым окончательно рассчитаться. Сколько же надо было бы заплатить за заем в этом случае? Пусть x — величина платежа. Ясно, что в этом случае вы фактически берете в долг $(4000 - x)$ р., а возвращаете через 2 года 4000, т. е.

$$(4000 - x) \cdot 1.25^2 = 4000,$$

так что $4000 - x = 2560$, или $x = 1440$.

Отметим, что в первом случае в качестве процентов выплачено 2250 р. через два года после получения займа, во втором — 2000 частями, в третьем как будто всего 1440 р. в момент получения займа. Обратим внимание на слова «как будто»: третий случай можно также интерпретировать как двухлетний заем в 2560 р. с выплатой процентов в сумме 1440 р. в конце срока.

Можно придумать много других схем уплаты процентов. Но можно возвращать частями и основной долг, что дополнительно увеличит число возможных схем.

Например, можно взять 4000 р., через год вернуть 2778 р., еще через год — еще 2778 (суммы округлены до целых значений). При этом можно считать, что через год возвращено 2778 р. основного долга, а к концу второго года — остальные 1222 р. основного долга и еще 1556 р. — проценты. А можно иначе: каждый год по 2000 р. основного долга и по 778 р. процентов. Читатель может самостоятельно провести расчеты и убедиться, что все они соответствуют условию предоставления займа под 25% в год.

Последний пример показывает, что разделение возвращаемых сумм на возврат основного долга и уплату процентов весьма условно. То или иное разложение может быть более или менее удобно для расчета «на пальцах» — не более того. Как говорится, «все рубли одинаковы». Логика формирования процентного дохода, описанная в разделе 2 лекции 18, показывает, что возвращаемые суммы должны удовлетворять единственному условию: *сегодняшняя ценность (PV) возвращаемых сумм должна быть равна величине займа.* Если вы взяли в долг сумму V под процентную ставку r за период и возвращаете через t периодов суммы W_t, $t = 0, 1, \ldots, T$, то единственное требование, которому должны отвечать суммы, сводится к выполнению равенства

$$V = \sum_{t=1}^{T} \frac{W_t}{(1+r)^2}.$$

Рассмотрим схему, предполагающую погашение долга вместе с процентами равными суммами, выплачиваемыми в течение ряда периодов. Вносимая сумма получила название *аннуитета*.[1] Различают аннуитеты *постнумерандо* (платеж производится в конце каждого периода) и *пренумерандо* (в начале периода).

Найдем величину аннуитета a, выплачиваемого в конце каждого из T периодов в погашение долга V. Для этого положим $W_t = a = \text{const}$:

$$V = a \cdot \sum_{t=1}^{T} (1+r)^{-t} = a\frac{(1+r)^{-1} - (1+r)^{-T-1}}{1-(1+r)^{-1}},$$

или, после упрощения,

$$V = \frac{a}{r}\left[1-(1+r)^{-T}\right],$$

откуда

$$a = \frac{rV}{1-(1+r)^{-T}}. \qquad (1)$$

Если срок возврата долга (T) очень велик, то знаменатель в последнем выражении близок к 1, так что $W \approx rV$; точнее,

$$\lim_{T \to \infty} a = rV.$$

Отсюда следует, что «вечный долг» в сумме V требует от должника ежегодных платежей в размере rV. Это можно интерпретировать следующим образом: если через год выплачены проценты за год в размере rV, то долг не изменяется, и с каждым годом процесс воспроизводится. Если сумма в 4000 р. взята под 25% «в долг навсегда», то достаточно ежегодно выплачивать по 1000 р. Впрочем, в момент очередного платежа вы можете вернуть «основной долг» — вместе с очередным взносом в 1000 р. заплатить еще 4000 и на этом прекратить платежи.

[1] От *позднелат.* annuitas — ежегодный платеж. В современной терминологии аннуитетом называется постоянная сумма, вносимая периодически, независимо от продолжительности периода.

В разделе 1 лекции 38 обсуждалась аналогия между поведением кредитора и поведением инвестора. Здесь мы видим, что соотношение между суммой вечного долга и его аннуитетом совпадает с соотношением между капитальной и прокатной ценами вечного ресурса.

Выше мы рассматривали схемы расчетов, при которых должник получал сумму займа одномоментно, а возвращать долг мог частями. Теперь мы рассмотрим обратную операцию, когда должник получает сумму частями, а возвращает в конце срока одномоментно. Подобная ситуация возникает, например, в случаях, когда вкладчик (кредитор) накапливает нужную ему сумму, делая периодические взносы на свой счет в банке, выступающем в роли должника. Схемы такого рода называют *накопительными*.

Пусть величина взноса в момент t равна v_t. Обозначим W сумму долга с процентами, образующуюся в конце процесса накопления, т. е. после момента T. По-прежнему должно выполняться равенство сегодняшних ценностей долга и его погашения:

$$\sum_{t=1}^{T} v_t \cdot (1+r)^{-t} = W \cdot (1+r)^{-T}.$$

В частности, если взносы должны быть равными ($v_t = v$), то равенство принимает вид

$$v\sum_{t=1}^{T}(1+r)^{-t} = v\frac{(1+r)^{-1}+(1+r)^{-T-1}}{1-(1+r)^{-1}} = \frac{v}{r}\left[1-(1+r)^{-T}\right] =$$

$$= W \cdot (1+r)^{-T},$$

откуда

$$v = W \cdot \frac{r}{(1+r)^{T}-1}. \tag{2}$$

Для подобных расчетов несколько удобнее пользоваться не величиной сегодняшней ценности, а величиной *будущей ценности* (*FV* — future value). К тому же будущая ценность больше соответствует механизму формирования величины долга в накопительных схемах.

Под будущей ценностью денежного потока (x_t, $t = 1, \ldots, T$) понимается результат приведения его к последнему моменту времени, обычно — к моменту завершения финансовой операции. Взносу x_t, произведенному в момент t, соответствует сумма возврата $x_t \cdot (1+r)^{T-t}$, а потоку в целом —

$$FV = \sum_{t=1}^{T} x_t \cdot (1+r)^{T-t}.$$

Для рассмотренного выше процесса накопления условие равенства будущих ценностей имеет вид

$$\sum_{t=1}^{T} v_t \cdot (1+r)^{T-t} = W.$$

Нетрудно заметить, что оно равносильно условию равенства сегодняшних ценностей. Сегодняшняя ценность и будущая ценность любого потока связаны друг с другом соотношением

$$FV = PV \cdot (1+r)^T,$$

так что если равны сегодняшние ценности двух потоков (в частности, любой поток может состоять из единственного платежа), то равны и их будущие ценности. Верно и обратное.

Можно высказать и более общее утверждение. Введем понятие ценности, приведенной к моменту b. Будем использовать обозначение RV_b для ценности потока, приведенной к моменту b. В этих обозначениях

$$RV_b = \sum_t x_t \cdot (1+r)^{b-t},$$

где суммирование распространяется на все значения t, для которых $x_t \neq 0$. Момент b — база приведения — может быть выбран произвольно; его выбор определяется соображениями удобства расчета и интерпретации его результатов. Начальная и будущая ценности являются частными случаями приведенной ценности, соответствующими различным базам: $PV = RV_0$, $FV = RV_T$. Переход от одной базы приведения к другой осуществляется в соответствии с равенством

$$RV_{b_1} = RV_{b_2} \cdot (1+r)^{b_1-b_2}.$$

Вследствие этого если равны ценности двух потоков, приведенные к одной базе, то также равны их ценности, приведенные к любой другой базе.

В заключение снова займемся вычислениями.

Допустим, что вы решили купить телевизор, который стоит 4000 р., и хотите сравнить две схемы платежей.

Первая схема — покупка в рассрочку. Вы оплачиваете покупку пятью равными ежегодными взносами, первый из которых производится в момент покупки. Плату за кредит, как и в предыдущих примерах, примем равной 25% годовых.

Так как первый платеж совпадает с моментом покупки, в данном случае размер платежа следует рассматривать как аннуитет пренумерандо; формула (1) соответствует аннуитету постнумерандо, и для нашего расчета ее нужно несколько изменить. Поскольку все платежи сдвигаются на один период вперед, не повторяя рассуждений, можно утверждать, что величина каждого платежа уменьшится в $(1+r)$ раз, так что

$$a = \frac{rV}{\left[1-(1+r)^{-T}\right]\cdot(1+r)}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$a = \frac{0.25\cdot 4000}{\left(1-1.25^{-5}\right)\cdot 1.25} = 1190\text{ р.}$$

Общая сумма выплат равна $5\cdot 1190 = 5950$ р.

Вторая схема — накопительная. Вы копите деньги в течение 5 лет, ежегодно вкладывая в банк равные суммы.

Величина ежегодного взноса определяется равенством (2):

$$v = \frac{0.25\cdot 4000}{1.25^5 - 1} = 487\text{ р.}$$

Сумма всех взносов равна $5\cdot 487 = 2435$ р.

По отношению к моменту покупки все платежи по первой схеме производятся на 4 года позже, чем по второй. Поэтому в первом случае величина каждого платежа (а следовательно, и всей суммы) в $1.25^4 \approx 2.44$ раза больше, чем во втором.

Дисконтирование в непрерывном времени

В лекциях 18 и 38 мы пользовались понятием сегодняшней ценности потока ожидаемых в будущем доходов. Поток доходов представлялся последовательностью уровней V_t, $t = 1, 2, \ldots, T$, где t — номер периода; V_t — доход, получаемый в течение t-го периода.

Величина сегодняшней ценности описывалась выражением

$$PV = \sum_{t=1}^{T} V_t\cdot(1+r)^{-t}. \tag{1}$$

Здесь r — процентная ставка за один период.

При этом по существу использовалось предположение о том, что в каждом из периодов доход поступает одномоментно. Процентная ставка r соответствует промежутку времени продолжительностью в один период. Если считать, что «сегодня», т. е. момент, к которому приводятся будущие доходы, — это конец нулевого и начало первого периода, то момент поступления дохода V_1 — это конец первого периода, V_2 — конец второго и т. д. Таким образом, равенство (1) предполагает, что доход каждого периода поступает одномоментно в конце периода.

На практике выражения вида (1) для сегодняшней ценности применяются и в случаях, когда доход поступает более часто; при этом под V_t понимается весь доход, ожидаемый в течение t-го периода. Так как доход поступает частями в различные моменты периода, формула (1) при таком применении оказывается приближенной. Если процентная ставка за период невысока, то и погрешности будут невелики, но при больших значениях процентной ставки погрешностями уже нельзя пренебречь.

Другим приближением к действительности служит представление будущих доходов в виде *непрерывного* потока. При этом основной характеристикой потока является его *интенсивность* — доход в единицу времени. Если $V(t,\ t+\Delta t)$ — доход в течение промежутка времени $(t,\ t+\Delta t)$, то средняя интенсивность потока на этом промежутке равна $V(t,\ t+\Delta t)/\Delta t$. Мгновенное значение интенсивности потока в *момент* времени t можно определить как предел средней интенсивности для интервала, продолжительность которого стремится к нулю:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t,\ t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

Если воспользоваться механической аналогией, то доход за некоторый промежуток времени можно уподобить пути, проходимому за этот промежуток движущимся телом; в таком случае интенсивность потока доходов в некоторый момент времени подобна скорости в этот момент. Как и скорость, интенсивность потока может непрерывно изменяться от одного момента времени к другому. Если интенсивность потока как функция времени известна, то величина дохода в течение произвольного промежутка времени $(t_1,\ t_2)$ выражается интегралом

$$V(t_1,\ t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Рассмотрим теперь короткий промежуток времени $(t,\ t+\Delta t)$. Доход за этот промежуток времени приблизительно равен $v(t)\Delta t$; считаем, что разновременностью поступления дохода в течение короткого промежутка времени можно пренебречь. В этом случае сегодняшняя ценность этого дохода равна приблизительно $v(t)\Delta t \cdot (1+r)^{-t}$, где r — процентная ставка, соответствующая *единице* времени (как показано в лекции 18, для того чтобы эта формула была справедливой, t не обязательно должно быть целым числом). Разбивая весь период поступления доходов $[0,\ T]$ на большое число N равных интервалов ($\Delta t = T/N$), получим приближенное выражение для сегодняшней ценности

$$PV \approx \sum_{k=1}^{N} v(t_k)\Delta t \cdot (1+r)^{-t_k},$$

тем более точное, чем меньше каждый из интервалов Δt. Точное значение получим, переходя к пределу

$$PV = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} v(t_k) \cdot (1+r)^{-t_k} \cdot \Delta t.$$

Под знаком предела стоит интегральная сумма, так что предел есть интеграл

$$PV = \int_0^T v(t)(1+r)^{-t}\,dt. \tag{2}$$

Выражение (2) дает точное значение приведенной ценности потока доходов в непрерывном времени. Однако если время рассматривается как непрерывная величина, вместо процентной ставки r удобнее пользоваться другой характеристикой — силой роста, $\rho = \ln(1+r)$. Ее использование позволяет представить равенство (2) в равносильной форме

$$PV = \int_0^T v(t)e^{-\rho t}\,dt. \tag{3}$$

Для чего нужно дисконтирование в непрерывном времени?

Во-первых, во многих теоретических моделях выделение тех или иных периодов (год, месяц и т. д.) носило бы искусственный характер и никакому из них нельзя было бы отдать предпочтение. Непрерывное представление потоков и соответствующая форма дисконтирования более естественны для таких моделей.

Во-вторых, и во многих практических случаях непрерывное представление потоков сочетает достаточно высокую точность со значительным практическим удобством.

Допустим, ваша фирма предполагает выпускать некоторый продукт в течение года и за этот период получить выручку 100 млн р.; продаваться продукт должен более или менее равномерно в течение года. Годовая процентная ставка составляет 50%.

Можно рассмотреть дискретный поток с расчетным периодом, равным году. В этом случае поток будет представлен одним уровнем $V_1 = 100$, и соответствующее приближение для сегодняшней ценности будет равно

$$PV_1 = \frac{100}{1+0.5} = 66.67 \text{ млн р.}$$

Как было замечено выше, фактически это сегодняшняя ценность дохода в 100 млн р., поступающего *в конце года*, что не соответствует предполагаемой динамике выручки. Более точный результат мы получим, если в качестве периода будет выбран квартал и поток будет представлен четырьмя одинаковыми уровнями — по 25 млн р. каждый. По годовой процентной ставке $r_{\text{г}} = 0.5$ рассчитаем процентную ставку $r_{\text{кв}}$ для периода, равного кварталу:

$$1 + r_{\text{кв}} = (1 + r_{\text{г}})^{1/4} = 1.5^{1/4} \approx 1.1067.$$

Теперь мы получаем следующее приближение для сегодняшней ценности:

$$PV_2 = \sum_{t=1}^{4} \frac{25}{1.1067^t} = 78.11 \text{ млн р.}$$

Так как продажи совершаются ежедневно, можно, конечно, разбить год на периоды, каждый из которых равен одному дню. Но такой громоздкий расчет едва ли оправдан, и не только из-за громоздкости. Едва ли дневная выручка будет *строго* одинаковой во все дни года. Исходное предположение сводилось к тому, что продажи распределены в течение года *более или менее* равномерно, ничего более определенного сказать нельзя. Поэтому проще всего не разбивать год на периоды, а считать интенсивность потока выручки примерно постоянной и равной 100 млн р./год. В этом случае

$$PV_3 = \int_0^T 100e^{-\rho t}dt = 100 \cdot \frac{1-e^{-\rho}}{\rho}.$$

Подставляя сюда значение $\rho = \ln 1.5 \approx 0.4055 \text{ год}^{-1}$, получим $PV_3 = 82.21$ млн р.

В рассмотренном примере в качестве единицы времени выбран год. Результат не изменится, если выбрать любую другую единицу. Если бы мы выбрали квартал, нам пришлось бы в соответствующих единицах выразить и интенсивность потока: $v(t) = 25$ млн р./кв., и силу роста: $\rho = 0.4055/4 = 0.1014$ кв$^{-1}$ (заметим, что единица силы роста имеет размерность, и пересчет этой величины из одних единиц в другие производится обычным образом). Итак,

$$PV_3 = \int_0^4 25e^{-\rho t}dt = 25\frac{1-e^{-4\rho}}{\rho} = 82.21 \text{ млн р.}$$

Переход от годичного *периода* к квартальному изменял временные характеристики потока: в первом случае рассчитывалась сегодняшняя ценность суммы, однократно получаемой в конце года, во втором — четырехкратного поступления выручки в конце каждого квартала. Переход от одной единицы времени к другой в непрерывной модели оставляет свойства потока неизменными: в обоих случаях годовая сумма распределена на интервале продолжительностью в год с постоянной интенсивностью.

Эластичность производственной функции, отдача от масштаба и распределение дохода

В настоящем разделе будет изложена и доказана одна важная теорема, относящаяся к распределению дохода. Но это будет в самом конце. Прежде придется обсудить некоторые свойства производственных функций и функций затрат; читателю придется вспомнить материалы всех предыдущих выпусков «Экономической школы».

Попутно у читателя будет возможность убедиться в том, что эластичности различных зависимостей — не только средство эмпирического описания наблюдаемых явлений, но и весьма эффективный инструмент теоретического анализа.

Перед чтением настоящей статьи, возможно, полезно будет вспомнить определение и основные свойства эластичностей — они изложены в вып. 1, в Математическом приложении «Эластичность функций».

Две отдачи от масштаба

Рассматривается производственная функция фирмы

$$q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

связывающая объем производства продукта q с объемами использования ресурсов x_1, x_2, ..., x_n. Под частной эластичностью производственной функции по объему i-того ресурса понимается величина

$$e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f}.$$

Изменение объема выпуска при *пропорциональном* изменении объемов использования всех ресурсов характеризуется общей эластичностью производственной функции

$$E = \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

При изложении теории производства в вып. 3 журнала мы фактически пользовались двумя различными понятиями отдачи от масштаба.

Говоря о производственной функции, мы связывали масштаб производства с использованием всех ресурсов при сохранении пропорций между ними: например, «увеличить масштаб в два раза» означало увеличить использование каждого ресурса вдвое. Если при этом выпуск продукции возрастает более чем в два раза, говорят о возрастающей отдаче от масштаба, в противном случае — об убывающей, а если выпуск увеличится ровно в два раза, то о постоянной отдаче от масштаба. Именно это свойство производственной функции отражает общая эластичность: отдачу от масштаба называют возрастающей, постоянной или убывающей в зависимости от знака соотношения

$$E \gtreqless 1. \tag{1}$$

Определяемую таким образом отдачу от масштаба будем называть *отдачей от масштаба в смысле производственной функции* (ПФ-*отдачей от масштаба*).

Другое определение связано с функцией затрат длительного периода. Если средние затраты LAC с ростом объема выпуска убывают, то говорят о возрастающей отдаче от масштаба, а если возрастают — об убывающей. (Поскольку в дальнейшем речь будет идти только о затратах длительного периода, букву L в обозначении затратных функций мы будем опускать). Отдачу от масштаба, соответствующую этому определению, будем называть *отдачей от масштаба в смысле функции затрат* (ФЗ-*отдачей от масштаба*). ФЗ-отдача от масштаба соответственно связана с эластичностью функции затрат.

Функция общих затрат $TC(q)$ имеет единственный аргумент — объем выпуска, поэтому можно говорить об ее эластичности, не уточняя, по какому аргументу. Средние затраты определяются как отношение $AC(q) = TC(q)/q$. Из общих свойств эластичности следует, что эластичность отношения равна разности эластичностей числителя и знаменателя; но $\mathbf{E}_q[q] = 1$, так что

$$\mathbf{E}[AC] = \mathbf{E}[TC] - 1.$$

Возрастающая функция имеет положительную эластичность, убывающая — отрицательную. Таким образом, знак соотношения

$$\mathbf{E}[TC] \gtreqless 1 \qquad (2)$$

показывает, будет ли ФЗ-отдача от масштаба возрастающей, постоянной или убывающей соответственно.

Напомним, что эластичность является локальной характеристикой функции: ее значения изменяются при переходе от одного значения аргумента к другому (или от одной комбинации аргументов, если их несколько, к другой). При обсуждении затрат длительного периода мы рассматривали как типичный U-образный характер изменения средних затрат. При малых значениях q функция AC убывала, затем проходила свое минимальное значение, а при больших q — возрастала. Это означает, что малым значениям q отвечают значения $\mathbf{E}[TC] < 1$, при больших — имеет место неравенство $\mathbf{E}[TC] > 1$. Эффективному размеру фирмы соответствует минимум AC, т. е. такой объем производства, при котором $\mathbf{E}[TC] = 1$.

Одна отдача от масштаба

В этом пункте мы рассмотрим связь между эластичностями производственной функции и функции затрат. Из выполненного анализа будет, в частности, следовать, что оба приведенных выше определения отдачи от масштаба эквивалентны, что позволит нам в дальнейшем говорить об отдаче от масштаба, не уточняя, в каком смысле мы употребляем этот термин.

Рассмотрим вначале случай, когда производство потребляет единственный ресурс в количестве x, так что производственная функция зависит от одного аргумента: $q = f(x)$. Считая цену ресурса постоянной, можно для потребляемого количества ресурса использовать не натуральное, а денежное выражение; в таком случае производственную функцию можно представить в виде $q = f^*(px) = f^*(C)$, где p — цена ресурса; C — затраты.

Функция затрат $C = TC(q)$ является обратной по отношению к f^*, и в силу известного свойства эластичности $\mathbf{E}_q[TC] = 1/\mathbf{E}_C[f^*]$. Так как функция f^* отличается от f лишь постоянным множителем p при аргументе, справедливо равенство

$$\mathbf{E}_q[TC] = \frac{1}{\mathbf{E}_x[f]}.$$

Так как x — единственный потребляемый ресурс, эластичность $\mathbf{E}_x[f]$ — это полная эластичность производственной функции, которую мы обозначаем буквой E. Обозначение единственного аргумента функции можно опустить, так что для случая единственного ресурса мы получили утверждение:

$$\mathbf{E}[TC] = \frac{1}{E}.$$

Теперь предстоит доказать, что это равенство справедливо и в случае произвольного числа ресурсов.

Прежде всего заметим, что эластичность общих затрат удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{E}[TC] = \frac{q}{TC(q)} \cdot \frac{dTC(q)}{dq} = \frac{MC(q)}{AC(q)}. \qquad (3)$$

Вспомним, что значением функции затрат для каждого объема выпуска q является *наименьшая* величина затрат, позволяющая производить продукт в количестве q. Иными словами, значение $TC(q)$ есть решение задачи

$$TC(q) = \min \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

при условии

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q.$$

Именно этому требованию подчиняются выбираемые фирмой комбинации ресурсов, определяющие экономически эффективные способы производства.

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \lambda[f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - q],$$

где λ — множитель Лагранжа (см. «ЭШ», вып. 2, Математическое приложение «Задача Лагранжа»). Заметим, что

$$\frac{dTC(q)}{dq} = \lambda.$$

Дифференцируя функцию Лагранжа по всем x_i, найдем условия минимума:

$$p_i - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Используя условия минимума, представим затраты в виде

$$TC(q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i = MC(q) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i.$$

Разделив обе части на q, получим

$$AC(q) = \frac{TC(q)}{q} = MC(q) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{q} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = MC(q) \cdot \sum_{i=1}^{n} e_i = MC(q) \cdot E.$$

С учетом равенства (4) получаем

$$\mathbf{E}[TC] = \frac{MC(q)}{AC(q)} = \frac{1}{E}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

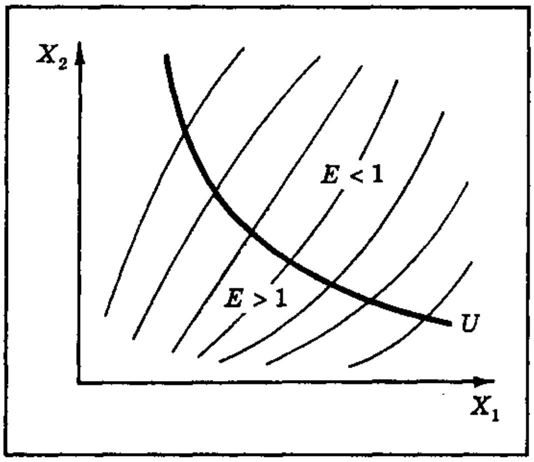
ТЕОРЕМА. *Пусть при фиксированных ценах ресурсов вектор* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *описывает экономически эффективный вариант производства,* q *— объем продукта по этому варианту. Тогда*

$$\mathbf{E}[TC] = \frac{1}{E}, \tag{4}$$

где $\mathbf{E}[TC]$ *и* E *— значения эластичностей в точках* q *и* x *соответственно.*

Следствием рассмотренной теоремы является эквивалентность двух ранее введенных определений отдачи от масштаба. Критериальные соотношения (1) для ПФ-отдачи и (2) для ФЗ-отдачи равносильны.

Значения функции $TC(q)$ — затраты, соответствующие экономически эффективному варианту производства, обеспечивающему объем продукта q. Все варианты, экономически эффективные при заданных ценах ресурсов, в пространстве ресурсов представлены точками *линии роста* фирмы — изоклины производственной функции, соответствующей данному соотношению цен. Если кривая AC имеет U-образную форму, то, как следует из полученных результатов, на ближнем (от начала координат) участке изоклины имеет место неравенство $E > 1$, а на дальнем — неравенство $E < 1$.



Униэла (U) и линии роста.

Если допустить, что при любой комбинации цен ресурсов кривая AC имеет U-образную форму, то все пространство ресурсов разбивается на две области, разделенные общей границей (на плоскости — кривой), на которой выполняется равенство $\mathrm{E}[f] = 1$. Назовем эту границу *униэлой* производственной функции (от *лат.* unus — один и слова «эластичность»). На рисунке она обозначена буквой U. При сделанном допущении униэла пересекается со всеми изоклинами. Эффективный масштаб фирмы определяется точкой пересечения линии роста, отвечающей данному соотношению цен ресурсов, с униэлой.

Следствие для теории распределения

Рассмотрим фирму, максимизирующую прибыль при постоянных ценах продукта и ресурсов и при этом имеющую эффективный размер, так что для этой фирмы $\mathrm{E}[TC] = 1$. Как показывает равенство (4), для нее выполняется условие $\mathrm{E}[f] = 1$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{q} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = 1. \tag{5}$$

Пусть производимый фирмой продукт продается на рынке по цене P; для выручки фирмы используем стандартное обозначение $TR = P \cdot q$. Почленно умножая последнее равенство на $P \cdot q$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left(P \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot x_i = TR. \tag{6}$$

Выражение в скобках — предельная отдача i-того ресурса при цене продукта, не зависящей от выпуска; она равна цене ресурса p_i, если последняя не зависит от объема использования ресурса. Итак, мы пришли к классическому утверждению теории функционального распределения дохода — утверждению об исчерпаемости дохода:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = TR.$$

Смысл этого равенства в том, что выручка фирмы в точности равна доходам, которые получают владельцы факторов, используемых фирмой.

К этому же утверждению приводит допущение о том, что производственная функция является однородной функцией первой степени, или линейно однородной, и потому удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = f.$$

Умножая обе части последнего равенства на P — цену продукта, мы снова придем к утверждению (6).

Допущение о линейной однородности производственной функции является слишком сильным и противоречит некоторым естественным представлениям о характеристиках производства. Однородность — глобальное свойство функции. Полная эластичность линейно однородной производственной функции равна 1 при любых значениях аргументов. Из этого в свою очередь следовало бы, что средние затраты не зависят от объема выпуска,— любой объем был бы равно эффективным.

В отличие от этого приведенный выше вывод исходит из допущений, которые выполняются для фирм в условиях конкурентного равновесия длительного периода на товарных и факторных рынках. Если таково состояние всех рынков в стране, то к выводу об исчерпаемости национального дохода можно прийти без допущения о линейной однородности производственной функции.

Упражнения

1. Введем в рассмотрение *эластичность производственной функции в коротком периоде*, характеризующую изменение объема продукта при пропорциональном изменении потребления *переменных* ресурсов; обозначим ее E^s. Покажите, что $E^s < E$.

2. Докажите теорему — аналог утверждения (4) для короткого периода:

$$\mathbf{E}[VC] = \frac{1}{E^s}.$$

3. В коротком периоде при снижении цены ниже некоторого уровня фирма прекращает производство. Соответствующая точка кривой предложения получила название *точки остановки производства* (shutdown point).[1] В этой точке пересекаются кривые

[1] Этот вопрос обсуждался в лекции 25, хотя термин «точка остановки производства» не использовался.

AVC и SMC (она отмечена на рисунке на обложке вып. 3 «ЭШ», если считать, что рисунок относится к переменным затратам).

Докажите, что при потреблении ресурсов, соответствующем точке остановки производства, выполняется неравенство $E > 1$.

4. Обозначим q^* объем производства, соответствующий эффективному масштабу фирмы. Если $q \neq q^*$, равенство (6) окажется нарушенным. Какой знак неравенства следует поставить на место знака равенства: а) при $q < q^*$; б) при $q > q^*$? Приведите экономическую интерпретацию полученных результатов.